LEONHARDI EULERI

MECHANICA

SIVE MOTUS SCIENTIA
ANALYTICE EXPOSITA

EDIDIT

PAUL STÄCKEL

TOMUS ALTER

LIPSIAE ET BEROLINI
TYPIS ET IN AEDIBUS B. G. TEUBNERI
MCMXII

MECHANICAE

TOMUS ALTER

MECHANICA
SIVE
MOTVS
SCIENTIA
ANALYTICE
EXPOSITA
AVCTORE
LEONHARDO EVLERO
ACADEMIAE IMPER. SCIENTIARVM MEMBRO ET
MATHESEOS SVBLIMIORIS PROFESSORE.

TOMVS II.

INSTAR SVPPLEMENTI AD COMMENTAR.
ACAD. SCIENT. IMPER.

PETROPOLI
EX TYPOGRAPHIA ACADEMIAE SCIENTIARVM.
A. 1736.

PRAEFATIO

Quemadmodum in Tomo primo motus liberos corporum a quibuscunque potentiis s
atorum exposui, ita in hoc Tomo altero motus non liberos pertractare constitui; c
ferentia in motus explicatione tanti est momenti, ut ex ea merito totius operis div
facta. In motu enim libero via a corpore descripta cum ex motu iam insito, tum
tentiis tam absolutis quam resistentia, quibus corpus afficitur, determinatur, quia pra
tentias et resistentiam nihil adesse ponitur, quod corporis motum determinet. A
irco motus liberi haec est primaria proprietas, ut via a corpore descripta omnino
ematur; canalis scilicet secundum viam, quam corpus describere debet, exacte incurv
orpore transeunte nullam omnino pressionem sustinebit, sed corpus per eum libere tr
t. In motu autem non libero praeter potentias et resistentiam, quibus corpus sollicita
m praescriptam esse ponimus, ita ut corpus sit coactum in hac via moveri. Haec
praescripta ad instar canalis commode considerari potest, in quo corpus movetur, ne
eo erumpere potest. Cum igitur in istiusmodi motibus data sit via, in qua corpus mo
bet, inquirendum est, quantam corpus a quibuscunque potentiis et resistentia sollicita
singulis locis habiturum sit celeritatem, quippe qua cognita totus motus perfecte co
tur. Praeterea autem cum corpus, nisi in hoc canali esset inclusum, aliam lineam de
ret, retinebit saltem in canali conatum in ea linea, in qua, si liberum esset, movere
gradiendi hocque conatu latera canalis premet et, nisi satis habeant firmitatis, re
rumpet. Hanc ob rem praeter celeritatem, quam corpus in singulis canalis locis hab
erminari debet quoque pressio, quam in latera canalis exercet, eiusque pressionis dire
firmitas laterum canalis ad corpus retinendum requisita cognoscatur. Huiusmodi au
tus non liberi etiam sine canali aliis modis produci possunt, id quod observare lice
ndulis atque in fundis, quibus corpus itidem in data linea moveri cogitur. Pendulis e
out HUGENIUS docuit, effici potest, ut corpus in quacunque curva praescripta moveri coga
emadmodum in pendulis tum simpliciter suspensis, quibus corpus in linea circulari mo

cogitur, apparet, tam iis, quae intra cycloides suspendi solent, quibus corp[illegible] moveri cogitur; similique modo effici potest, ut corpus in data quaque curva m[illegible]

Haec igitur est prima species motus non liberi, qui fit super data lin[illegible] autem alia species motus non liberi attendi meretur, in qua non ipsa quaed[illegible] tum *superficies praescribitur, in qua corpus moveri cogitur;* unde [illegible] liberorum species est restricta quam prior, cum in hac corpori adhuc lib[illegible] viam in data superficie sitam eligendi. Hanc ob rem haec motus non li[illegible] tractari debet, ut primo linea in data superficie determinetur, quam corp[illegible] resistentia sollicitatum describet, deinde vero, ut celeritas corporis in [illegible] punctis definiatur, tertio denique, ut etiam pressio, quam corpus in [illegible] investigetur. Huiusmodi autem motus non liberi pariter ac priores pendul[illegible] modo repraesentari possunt; corpus enim pendulum oblique impulsum, ni[illegible] sit in plano verticali, lineas curvas varii generis describet, quae autem omn[illegible] *ficie sphaerica, cuius centrum in ipso suspensionis puncto est.* [illegible] huc redit, ut in superficie sphaerica primo linea, quam corpus proiectum d[illegible] minetur, deinde vero celeritas in singulis locis et tertio pressio, quam in [illegible] Simili modo etiam perspicitur effici posse, ut corpus pendulum non ad sp[illegible] ricam, sed ad aliam quamque restringatur, dum scilicet circa punctum [illegible] ficies evoluta disponatur. *Haec igitur est altera motuum non liberorum* [illegible] motu super data superficie determinando occupatur; atque in his duabus m[illegible] rorum speciebus indagandis totus hic Tomus secundus absolvitur.

Quo ergo ad hanc tractationem, quae scitu necessaria sunt, praep[illegible] *primo* fundamenta et principia exposui, ex quibus, quae ad cognitionem [illegible] motuum non liberorum pertinent, derivari queant. *Demonstravi* [illegible] potentiis sollicitatum tam super data linea quam super superficie mot[illegible] debere; in superficie autem fore viam a corpore descriptam ip[illegible] in ea superficie duci potest. Deinde investigavi leges generales, quas [illegible] etiam resistentia tam in *accelerando* vel retardando motum, tum in pr[illegible] Ad haec etiam doctrina de vi centrifuga exponitur, quam *corpora* [illegible] sollicitata exercent quaeque ex motu curvilineo, quo corpus [illegible]

In Capitibus deinde secundo et tertio motus corporum super dat[illegible] *quam in medio* resistente fuso contemplor et examino. Primo [illegible] quo corpus a quibuscunque *potentiis sollicitatum* super data line[illegible] movetur, sive descendendo sive ascendendo; atque si *curva ita fuerit* [illegible] descensus quam ascensus producendos sit idonea, oscillationes quoque [illegible] se ratione temporum comparo; atque in hoc negotio motuum et p[illegible] tam in *circulo quam cycloide* factarum definio. Deinceps problemata tr[illegible]

tissimum pro datis potentiis sollicitantibus in curvas inquiro, super quibus motus da
beat proprietatem. Huc scilicet pertinent problemata de inveniendis curvis aequal
scensus vel recessus a dato puncto et huiusmodi plura, quae vel ab aliis iam sunt
ta, vel ad quae ipsum institutum perduxit. Inter haec prae ceteris eminent problem
lineis brachystochronis et tautochronis, quorum utrumque ad ulteriorem, quam adhu
oquam est factum, perfectionis gradum evexi. Circa curvas enim brachystochronas erro
i a nonnullis tam in vacuo quam medio resistente erat commissus, correxi et loco p
ii HUGENIANI in se quidem veri, sed insufficientis, aliud latissime patens substitui,
nonstravi in quocunque medio et potentiarum sollicitantium hypothesi quacunque
rpetuo curvam esse brachystochronam, super qua corpus ita moveatur, ut tota pre
plo sit maior quam vis centrifuga. Simili modo novam atque genuinam curvas ta
ronas inveniendi methodum trado (quae enim ante sunt inventae tautochronae, nulla
no methodo, sed potius divinatione sunt erutae), cuius ope non solum cycloidem
dum sub tautochronae nomine celebrem inveni, sed praeter eam innumerabiles alias cu
aesito satisfacientes elicui, inter quas adeo curvam algebraicam observavi; praeterea
aliis agnatis quaestionibus in vacuo quam ex integra huius negotii tractatione pro me
istente praestantiam et utilitatem huius methodi abunde intelligere licebit. Ceterum
ec methodus instar speciminis tam Analyseos quam Mechanicae promotae est cense
quoque passim in difficiliorum quorundam problematum solutionibus non contemne
alyseos subsidia apparebunt, quibus etiam haec scientia non parum promota esse vide

In quarto denique Capite motum super data superficie persequor, quae doctrina, u
mine adhuc est tacta, ita quoque tractatu est difficillima propter naturam et propriet
idorum nondum satis perspectas neque ad calculum revocatas. Antequam igitur de h
odi motu quicquam statui potuerat, methodum exponere necesse erat, qua propriet
perficierum et linearum in iis ductarum erui atque calculo subiici possent. Hoc ita
aestiti ope aequationum tres quantitates variabiles continentium, quibus iam ante tun
mment. Tomo III ad lineam brevissimam super quavis superficie determinandam,
huius Tractatus Tomo praecedente ad motus liberos non in eodem plano factos inv
ndos sum usus. His denique praeparatis progredi licuit ad effectus potentiarum in cor
per superficiebus mota definiendos, ex quibus modum elicui tam viam a corpore descrip
am reliqua motus symtomata inveniendi. Quum vero calculus, quamdiu in general
rsamur, nimis fiat prolixus et tractatu difficilis, omissa resistentia omnia ad vacuum
avitatem ordinariam reduxi atque praecipue motum pendulorum oblique oscillantium
rscrutatus, cuius motus anomalias et absidum progressiones diligenter determinavi.

Haec igitur sunt, quae in isto Tomo secundo sum complexus, quibus expeditis ope
bo, ut, quam primum licuerit, motus corporum finitorum et primo quidem rigidorum
dinem reducam atque pari methodo exponam.

INDEX CAPITUM[1]

TOMI SECUNDI

1) Index ab editore additus est. P. St.

CAPUT PRIMUM

DE MOTU NON LIBERO IN GENERE

DEFINITIO 1

Corpus non libere moveri dicitur, quando externa obstacula impediunt, quo iuxta eam directionem progrediatur, iuxta quam cum ratione motus insiti tione potentiarum sollicitantium moveri deberet.

SCHOLION 1

In motu puncti libero, quem parte prima exposuimus, spatium, in orpus movebatur, ab omnibus obstaculis vacuum assumsimus; nunc vero n ita comparatum ponemus, ut corpori non liceat in quaque directione di propter firmos parietes transitum non permittentes.

COROLLARIUM 1

Quando itaque corpus in motu suo obstaculum invenit ideoque eam onem, secundum quam tendit, conservare non potest, tum vel quiescere alia directione motum continuare debebit.

COROLLARIUM 2

. In quanam autem directione corpus progrediatur post occursum ob-, ex circumstantiis tum motus tum positionis obstaculi iudicari debet.

SCHOLION 2

. Videtur haec doctrina ad motum corporum ex percussione pertinere, e re tamen hoc libro non agetur. Hoc vero libro alius generis obsta-

SCHOLION 5

10. In his autem motibus tam super lineis quam superficiebus da
imum ab omni frictione abstrahimus neque ullam motus retardation
nemus. Quamobrem lineae et superficies, super quibus puncta mov
onuntur, levissimae concipi debent et omni asperitate destitutae, ne mo
tardationi propter eam sit obnoxius. Motum rotatorium quoque omn
animo profligari oportet, cum ex eo mutationes in motu oriantur, q
emum in sequentibus explicari possunt. Hanc ob rem punctum quasi
endo moveri concipiendum est, ut eius pars quaeque, si modo in pun
artes concipi possunt, eundem habeat motum.

SCHOLION 6

11. Quae igitur in praecedente libro traditae sunt et in hoc de m
unctorum tradentur, ad corpora finitae magnitudinis quoque accommod
ossunt, si modo eorum motus sibi sit perpetuo parallelus et omnes par
orporis aequali motu sint praeditae. Hoc vero ex sequentibus libris cla
pparebit, quibus casibus finitorum corporum motus a motu punctorum
iscrepet. Quocirca in his libris ideo puncta tantum consideramus, quia,
artibus destituuntur, ita etiam in partibus diversi motus inesse nequeunt

PROPOSITIO 1

THEOREMA

12. *Corpus seu punctum, quod super linea data movetur et a nullis poter
ollicitatur, perpetuo eandem celeritatem conservabit, si modo illius lineae duo q
ae elementa contigua nusquam finitae magnitudinis angulum constituant.*

DEMONSTRATIO

Quia corpus, dum in linea AM (Fig. 1, p. 10) movetur, a nulla poter
ollicitatur neque frictioni ullus conceditur locus, motus corporis aliter var
equit, nisi quatenus linea AM impedit, quo minus corpus libere moveri pos
x quo, quae celeritatis immutatio oriri debeat, investigandum est. Sit celeri
uam corpus in M habet, $= c$; hac igitur celeritate corpus, si libere movere
n tangente $M\nu$ progrederetur; quod vero, quia corpus curvam AM desc

non potest, fieri nequit, sed corpus cogitur per Mm prog
concipiatur motus corporis secundum $M\nu$ resolutus in
motum per Mn, existen
grammo rectangulo. Pers
per Mn, cuius directio e
elementum Mm, penitus
effectum in celeritate imm
Corpus igitur altero motu
celeritate, quae est ad pri
Mm ad $M\nu$; quare celer
mentum Mm describit, er
vero $M\nu m$ est triangulu
ideoque $Mm < M\nu$, celer
quam prior c atque ce
erit $= \frac{(M\nu - Mm)c}{M\nu}$. Ad h

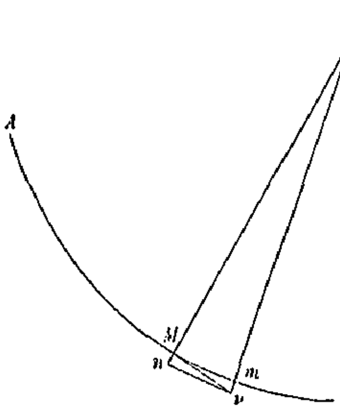


Fig. 1.

dum sit MO, radius osculi curvae in M, $= r$ et elementu
ob ang. $O =$ ang. $mM\nu$, $MO : Mm = Mm : m\nu$, ex quo p

$$M\nu = \sqrt{\left(ds^2 + \frac{ds^4}{r^2}\right)} = \frac{ds}{r}\sqrt{(r^2 + ds^2)} = ds$$

Ex hoc iam obtinebitur decrementum celeritatis, dum c
tum ds percurrit,

$$= \frac{cds^2}{2r^2},$$

cuius integrale dabit decrementum celeritatis, dum corp
portionem percurrit. At expressio $\frac{cds^2}{2rr}$ aequivalet differe
eius ergo integrale erit differentiale primi gradus. Quan
celeritatis, postquam corpus quantumvis arcum curvae
infinite parvum atque corpus motu uniformi feretur per
si modo radius osculi r nusquam fuerit infinite parvus.

COROLLARIUM 1

13. In omni igitur curva, in qua radius osculi nusqua
corpus movebitur uniformiter, siquidem a nullis poten
frictionem patitur.

COROLLARIUM 2

14. Si radius osculi est infinite parvus, tum $\frac{cds^2}{2r^3}$ vel est quantitas fi[...]
l differentiale primi gradus. Illo casu corpus finitum celeritatis grad[...]
nittet, hoc vero tantum infinite parvum.

COROLLARIUM 3

15. Cum autem istius modi puncta in omnibus curvis sint rara et a[...]
vicem dissita, corpus tamen arcum inter duo talia puncta intercept[...]
otu uniformi percurret.

SCHOLION 1

16. Casus, quibus corpus celeritatis finitum decrementum subito pati[...]
i non esse possunt, nisi ubi curva habet cuspides. His enim in lo[...]
rpus directe reverti cogitur et normaliter in punctum cuspidis impin[...]
nc igitur corpus non solum finitum celeritatis gradum amittet, sed omn[...]
mem motum amittere debebit; nisi forte corpus ponatur elasticum, c[...]
su eadem celeritate, qua incurrit, reflectetur atque ita motum uniform[...]
nservabit. In cuspide enim duo elementa angulum infinite acutum c[...]
tuunt.

SCHOLION 2

17. Praeter cuspides vero alia dari possunt in curvis puncta, in qui[...]
dius curvedinis est infinite parvus; quia vero duo quaeque elementa c[...]
gua fere in directum sunt posita et angulus deinceps positus est infi[...]
rvus, fieri non potest, ut ex demonstratione apparet, ut corpus finit[...]
leritatis decrementum patiatur. Quamobrem, cum istiusmodi puncta s[...]
ra, corpus nihilominus motu aequabili movebitur.

COROLLARIUM 4

18. Si igitur corpus motum fuerit elasticum, in quacunque curva sem[...]
otu aequabili feretur; at si non sit elasticum, cuspides tantum motum tur[...]
nt, dum eum prorsus tollunt.

SCHOLION 3

19. Ut haec clarius percipiantur, sint duo curvae element
et anguli ABC, quem constituunt, deinceps positus CBI
cuius sinus sit dz posito sinu tot
pus, postquam elementum AB de
in BD progredi conatur celeritate
eius motus duplex concipiatur, a
BC, alter in directione ad BC no
tum duci non potest. Demisso ig

Fig. 2.

perpendiculo DC corpus altero motu per BC movebitur c
ad priorem ut BC ad BD, i. e. ut $\sqrt{(1-dz^2)}$ ad 1. Per L
celeritatem $= c\sqrt{(1-dz^2)}$ seu $c - \frac{c\,dz^2}{2}$; quare celeritatis
$\frac{c\,dz^2}{2}$, quod aequivalet differentiali secundi gradus. Ex quo
diu in quaque curva angulus CBD fuerit infinite parvus, c
bili esse progressurum. At in omni curva angulus $|CBI$
parvus vel angulus ABC ipse, quod in cuspidibus acci
cuspides tantum motus uniformitatem perturbant, nisi corp
quo casu nihilominus motus uniformitas conservatur.

PROPOSITIO 2

THEOREMA

20. *Dum corpus motu uniformi in curva AM* (Fig. 1,
singulis punctis M premet curvam normaliter vi, quae est ad
tatis ut altitudo eius celeritati debita ad dimidium radium osc

DEMONSTRATIO

Si corpus in curva AM libere moveri deberet motu ae
vim adesse oporteret normalem corpus secundum MO trahe
se haberet ad corporis gravitatem ut altitudo celeritati cor
midium radium osculi MO, ut ex demonstratis libri praeced
apparet. Nisi enim talis vis adesset, corpus in linea recta
autem casu canalis AM, in quo corpus inclusum concipitur,
corpus in recta progrediatur. Quamobrem corpus tanta vi

remet secundum directionem Mn. Si enim talis vis normalis adesset, corp
canali AM libere moveretur neque illum premeret; hac vero vi absen
t hic ponimus, necesse est, ut corpus ipsum canalem tanta vi premat. Q. E.

COROLLARIUM 1

21. Si igitur altitudo celeritati corporis debita ponatur v et rad
sculi $MO = r$ atque gravitas corporis $= 1$, quam scilicet haberet, si
uperficie terrae esset positum, erit vis, qua corpus canalem in M secund
In premet, $= \frac{2v}{r}$.

COROLLARIUM 2

22. Si corpus maiore vel minore celeritate moveretur in curva AM, t
ressio in M maior vel minor esset in duplicata celeritatis ratione, q
ltitudo v quadrato celeritatis est proportionalis.

COROLLARIUM 3

23. Directio huius pressionis est normalis in curvam et directe contra
st positioni radii osculi MO. Quare radius osculi in alteram curvae part
roductus dabit directionem huius pressionis.

COROLLARIUM 4

24. Si corpus in linea recta movetur, haec pressio erit nulla ob radi
sculi infinitum. Hoc quoque ex ipsa motus natura perspicuum est. Cor
nim motum in recta uniformiter sponte progreditur et hanc ob rem canal
ectum non premit.

COROLLARIUM 5

25. Si curva AM fuerit circulus, pressio ubique erit eadem. Eo v
naior erit, quo minor est radius circuli. Existente enim celeritate cad
ressio erit reciproce ut radius circuli.

SCHOLION 1

26. Quo corpus in curva AM libere moveri possit uniformiter, nece
st, ut secundum normalem MO trahatur vi $= \frac{2v}{r}$. Ex quo intelligi l

corpus tanta vi in plagam oppositam niti; alioquin enim illa
opus ad corpus in curva conservandum. Dum igitur corpus i
moveri cogitur neque eius nisus a vi normali tollitur, hunc r
in canalem exercebit. Quamobrem talis canalis tantam firmi
debebit, ut hanc pressionem sustinere queat.

COROLLARIUM 6

27. Apparet igitur corpus motum sine ullo celeritatis disp
edere posse, qui scilicet consistit in pressione definita.

COROLLARIUM 7

28. Ex motu ergo solo pressio oriri potest. Quamobrem,
sione seu a potentiis motus generatur, ita quoque ex motu
potest.

SCHOLION 2

29. Intelligitur hinc, quod iam supra innuimus libro prim
certum esse, utrum motus potentiis debeatur an vero potentiae m
enim in mundo utrumque, potentias nempe et motum, existere
alterius sit causa, quaestio est tum ex ratione tum ex obser
cidenda. Rationi quidem minime consentaneum videtur corpo
insitos tribuere, multo minus potentias per se existentes statue
vero is phaenomenorum causas genuinas dedisse censendus est
motu orta demonstraverit. Motum enim semel existentem pe
vari debere clare ostendimus supra [§ 63]; hic vero, quemadmo
potentiae oriantur, exposuimus. Quemadmodum vero potentiae
existere vel conservari queant, concipi non potest. Quamobre
omnes potentias, quae in mundo conspiciuntur, a motu proveni
genti scrutatori incumbit investigare, ex quonam quorumque c
quaelibet potentia in mundo observata ortum suum habeat.

SCHOLION 3

30. Cum difficile intellectu sit, quomodo talis effectus,
continua, a corpore moto sine ullo celeritatis dispendio oriatur,
erit in huius rei causam inquirere. Vidimus in praecedent

tum corporis in curva linea non absolute aequabilem esse, sed celerit[illegible] era decrementum pati, dum corpus per singula elementa curvae mov[illegible] ec vero decrementa differentialibus secundi gradus aequivalent, ut e[illegible] nities repetita celeritatem corporis infinite parum tantum minuere qu[illegible] c igitur infinite parvo celeritatis decremento pressionem adscribi de[illegible] ico; in hacque sententia eo magis confirmor, quod, quo maius sit eritatis decrementum, eo maior quoque existat pressio. Cum pressi[illegible] sit $\frac{2v}{r}$ hacque vi totum elementum Mm, dum percurritur, prematur, li[illegible] us pressionis effectum in $Mm = ds$ exponere per $\frac{2v\,ds}{r}$. Supra rementum celeritatis, dum corpus elementum Mm percurrit, inve[illegible] $\frac{c\,ds^2}{2r^2}$ (§ 12). Quod autem ibi erat c, hic nobis est $\sqrt{v}$; ergo cum $dc = \frac{c\,ds^2}{2r^2}$, erit

$$-\frac{dv}{2\sqrt{v}} = \frac{ds^2\sqrt{v}}{2r^2} \quad \text{seu} \quad -dv = \frac{v\,ds^2}{r^2}.$$

obitur ergo $-4v\,dv = \frac{4v^2ds^2}{r^2} =$ quadrato pressionis, quam sustinet ntum Mm.

COROLLARIUM 8

31. Quadratum pressionis ergo in Mm exercitae aequivalet decrem[illegible] us $2v^2$. Atque si hoc decrementum aequale fuerit ipsi ds^2, tum pr[illegible] ualis est vi gravitatis, ex quo comparatio harum pressionum cognosc[illegible]

COROLLARIUM 9

32. His ergo concessis istud infinities infinite parvum celeritatis d[illegible] ntum sufficit ad pressionem finitam producendam. Quamdiu enim i[illegible] lecrementum homogeneum est ipsi ds^2, pressio est finita; sin vero id nentum infinities maius existeret quam ds^2, pressio quoque foret magna.

DEFINITIO 2

33. *Pressio haec, quam corpus in linea curva motum exercet in hanc li[illegible] tur vis centrifuga, eo, quod eius directio a centro circuli osculatoris O t[illegible]*

COROLLARIUM 1

34. Vis centrifuga ergo est ad vim gravitatis ut altitudo celeritati[illegible] ad dimidium radium osculi.

COROLLARIUM 2

35. Quando ergo corpus in linea curva moveri cogitu
centrifuga premit, etiamsi a nulla potentia sollicitetur.

SCHOLION

36. Quando vero corpus a potentiis quoque sollicitat
in canalem ab his potentiis orietur tumque canalis duplic
partim nempe a potentiis, partim a vi centrifuga. Nunc ig
in corpus non libere motum valeant, investigandum est.

PROPOSITIO 3

THEOREMA

37. *Si corpus, quod in canali AM* (Fig. 3) *movetur,*
potentia MN, cuius directio normalis est in curvam AM, cele
neque minuetur, sed tota potentia in premendo canali consume

DEMONSTRATIO

Ex priore libro [§ 164] manifestum est potentiam, cuiu
tionem motus sit normalis, celeritatem neque augere neq
quam hocenim ibi de mot
stratum, hic tamen eo
habet, cum potentia nor
in consequentia neque in
In motu libero vero pot
tionem corporis immut
hoc loco habere non po
apprimetur corpus ad
quenter tanta vi canale
tione MN. Q. E. D.

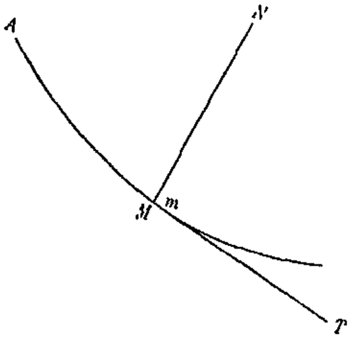


Fig. 3.

COROLLARIUM 1

38. Directio igitur talis vis normalis vel incidit in di
fugae vel ei directe est contraria. Illo casu auget vi
casu minuit.

COROLLARIUM 2

39. Quia directio vis centrifugae in convexam curvae partem in effectus augebitur, si normalis vis directio in eandem plagam in i normalis vis in concavam partem dirigitur, minuetur effectus.

COROLLARIUM 3

40. Si vis normalis fuerit $= N$ et vis centrifuga ut ante $= \frac{2v}{r}$, ur curva vel vi $\frac{2v}{r} + N$, si hae vires fuerint conspirantes, vel vi $\frac{2v}{r}$ uerint contrariae.

COROLLARIUM 4

41. Si vis normalis fuerit aequalis et contraria vi centrifugae, am pressionem sustinebit, seu corpus ex ea egredi non conabitur. casu eandem curvam corpus libere describeret; id quod perspic quo est ex vi normali, quae tum est $\frac{2v}{r}$; hac enim efficitur, ut c nabiliter in quacunque curva libere moveatur.

PROPOSITIO 4

THEOREMA

42. *Si corpus, quod in canali AM* (Fig. 3, p. 16) *movetur, in M sollicite ntia, cuius directio sit secundum tangentem MT, huius effectus in hoc con eleritatem corporis vel augeat vel diminuat eodem modo quo in motu liber*

DEMONSTRATIO

Quia huius potentiae directio est ipsa canalis tangens MT, ca ctum huius potentiae impedire non potest; neque etiam in canalem entia ullum effectum exercere poterit. Quamobrem augebit haec pot diminuet celeritatem corporis, prout eius directio directioni corpori spirans vel contraria fuerit, prorsus ac si corpus libere moveretur. ta altitudine celeritati in M debita $= v$, elemento $Mm = ds$ e $= T$, erit $dv = Tds$ accelerante potentia T; at retardante ea $= - Tds$. Q. E. D.

COROLLARIUM 1

43. In motu corporum igitur super lineis datis vis nor
tantum generat in eas, vis tangentialis vero celeritatem tan

COROLLARIUM 2

44. Cum vis resistentiae effectum vis tangentialis reta
eodem quoque modo aget in motum corporum super datis li
liberum. Si igitur praeter vim tangentialem accelerantem
stentia R, prodibit ex ambabus coniunctim $dv = Tds - Rd$

PROPOSITIO 5

PROBLEMA

45. *Si corpus super linea data AM* (Fig. 4) *moveatur in resistente et insuper sollicitetur a potentia absoluta, cuius direct minare effectum tam potentiae absolutae quam resistentiae ne quam curva AM sustinet.*

SOLUTIO

Sit altitudo celeritati in M debita $= v$, vis resistentiae
soluta $MP = P$, cuius directio sit talis, ut sumto elemen

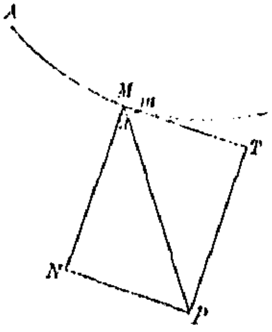


Fig. 4.

perpendiculum mn ex m in MP de
$Mn = dy = \sqrt{(ds^2 - dx^2)}$. Resolvatur
duas secundum MN normalem in
tangentem trahentes; erit ob triangul
similia vis normalis MN seu $PT =$
tialis $MT = \frac{Pdy}{ds}$ celeritatem augens.
resistentiae celeritatem minuit, au
tantum ab excessu $\frac{Pdy}{ds} - R$; hanc c

$$dv = Pdy - Rds.$$

Normalis vis $\frac{Pdx}{ds}$ vero efficit, ut curva in M tantundem pr
directionem MN ad convexam curvae partem sitam. Quare
eandem plagam urgeat, quae est $= \frac{2v}{r}$ designante

M, erit vis totalis, qua curva in M secundum MN premitur,

$$= \frac{Pdx}{ds} + \frac{2v}{r}.$$

ndo tum motus corporis super curva tum curvae pressio in singulis pun notescit. Q. E. I.

COROLLARIUM 1

46. Ex his duabus formulis igitur accelerationem et pressionem exprim ous omnia deduci possunt, quae ad motum super lineis datis pertinent.

SCHOLION 1

47. Hic quidem unicam potentiam absolutam posuimus; nihilomi men satis ex eo intelligitur, quomodo plurium potentiarum effectus sit rminandus. Scilicet quemadmodum in motu libero fecimus, ita etiam ngulae potentiae in binas, normalem nempe et tangentialem, sunt re ndae, ex quibus colligendis una vis normalis unaque tangentialis orit arum effectus per propositiones 3 et 4 determinari poterunt.

SCHOLION 2

48. Hactenus igitur fundamenta exposuimus, ex quibus in sequenti otum corporum super lineis datis determinare licebit. Antequam aut o motu super superficiebus datis similia principia tradamus, expedit, ucis ostendamus, quo modo motus super linea data in effectum ded ossit. Namque ope canalis, in quo corpus contineatur, talis motus min roduci poterit propter frictionem aliaque obstacula, quae tolli neutiqu ossunt. Commodissime autem huiusmodi motus non liberi efficiuntur p ulorum ope, uti primum a HUGENIO factum est[1]); quamobrem hanc pendu m ad institutum nostrum accommodationem sequenti propositione icabimus.

1) CHR. HUYGENS, *Horologium oscillatorium sive de motu pendulorum ad horologia a monstrationes geometricae*, Paris 1673; *Opera varia*, Vol. I, Lugduni Batavorum 1724, p. 89 P. St.

PROPOSITIO 6

PROBLEMA

49. *Ope penduli efficere, ut corpus in data linea moveatur.*

CONSTRUCTIO

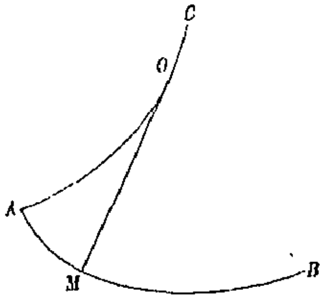


Fig. 5.

Sit AMB (Fig. 5) *curva proposita,*
moveri debeat; huius curvae constru
AOC laminaque secundum eius fi
vetur et firmetur. Tum filum huic
cunducatur, quod altero termino ad
affixum, altero vero termino in
habeat corpus movendum. Quando
moveri incipit, perspicuum est id in
moveri debere, quia filum, dum a
ratur, hanc curvam evolutione describit. Q. E. Fac.

COROLLARIUM 1

50. Hac igitur ratione corpus in data curva progreditur
nibus non est obnoxium. Quare tali motu commodissime pe
effici poterunt, quae in theoria inveniuntur.

COROLLARIUM 2

51. Ex doctrina de evolutionibus intelligitur fili partem
separatam in curvam AMB esse normalem ipsumque eius radi

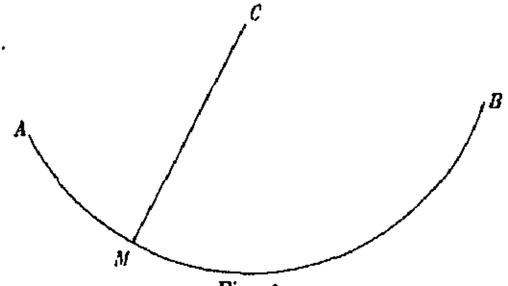


Fig. 6.

COROLLARIU

52. Quo corpus in
culi AMB (Fig. 6) mov
incurvata non est opu
altero termino C ta
centro C peripheriae es

COROLLARIUM 4

53. Quia filum MO (Fig. 5, p. 20) est radius osculi, vis centrifuga tot
tendendum hoc filum impendetur. Quare hoc filum tum satis roboris hal
tum extensioni obnoxium non esse debet. Nisi enim eandem perp
longitudinem conservet, curvam desideratam non describet.

COROLLARIUM 5

54. Accedente potentia absoluta habebitur praeter vim centrifu
vis normalis, quae filum quoque tendet, si vi centrifugae fuerit conspi
At si contraria fuerit, minuet tensionem fili, imo etiam, si maior fu
comprimet, quo casu evolutio nullius erit usus. Nam cum filum debeat
flexile, compressioni resistere non poterit neque ideo impedire, quo m
corpus a curva AMB versus evolutam recedat.

SCHOLION 1

55. Praeter hanc difficultatem ista curvarum per evolutiones gene
hoc quoque laborat defectu, quod linea recta produci nequeat; ad eam
generandam filum requireretur infinite longum. Simili modo haec evo
ad curvas accommodari non potest, quae alicubi radium osculi habent in
magnum. Deinde etiam neque cuspide neque flexu contrario praeditae cu
hoc modo describi possunt. Quamobrem ista praxis locum tantum hab
curvis ubique finitam curvaturam habentibus, ad quod addi debet, ut pr
curvae totalis nusquam in curvae concavam partem dirigatur.

SCHOLION 2

56. Hugenius, qui primus evolutionis doctrinam excoluit, statim ea
hunc ipsum usum adhibuit, uti ex eius egregio opere de horologio os
torio apparet. Cum enim invenisset oscillationes super cycloide omnes
isochronas, motum super cycloide in horologia inferre volebat, quod
pendulum intra cycloides oscillans effecit. Cum enim cycloidis ev
sit cyclois, hac ratione obtinuit, ut corpus filo annexum in
moveretur.

SCHOLION 3

57. In hoc autem pendulorum motu maxime notari convenit pra
rpus motum filum quoque moveri debere, id quod ad institutum h
ri, in quo de motu puncti tantum agetur, minime pertinet. Pract
otus corporis pendulo annexi non est sibi parallelus, sed circularis, c
ntrum scilicet circuli curvam osculantis, qui motus pariter hoc loco
tingitur. Hoc igitur libro motum puncti duntaxat super linea vel su
ie data examini subiiciemus mentemque tam a motu fili quam a m
rculari abstrahemus. In sequentibus autem motum pendulorum, ubi
otus fili et motus circularis in computum ducetur, ad motum puncti tan
lucemus, ita ut haec, quae hoc libro tractabuntur, nihilominus in p
um sint habitura. Quamobrem, ut iam monuimus, punctum motu
nper parallelo super curva seu superficie sine ulla frictione ferri
ncipiendum.

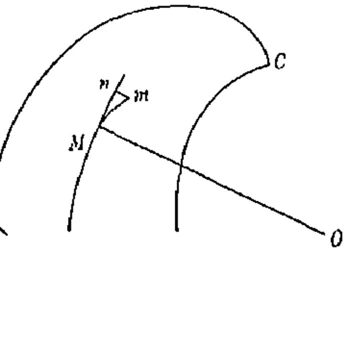
PROPOSITIO 7

THEOREMA

58. *Si corpus a nullis potentiis sollicitatum movcatur in vacuo seu m
n resistente super superficie quacunque* ABC (Fig. 7), *motu feretur unif
imum ab omni frictione abstrahendo.*

DEMONSTRATIO

Cum corpus super linea data motum impressum continuare queat, m
agis super superficie data moveri poterit, eo, quod eius libertas minus



restricta. Sit igitur DMm linea, in qua co
progreditur; haec erit vel recta vel curva.
ista linea fuerit recta, dubium non est,
corpus motu aequabili sit progressurum.
autem fuerit curva, quae aequatione exp
potest, duo quaeque eius elementa contigua
proxime in directum erunt sita vel angu
infinite acutum constituent, quod in cuspid
accidit. Illo casu supra demonstratum est co
:ementum pati (§ 12). In cuspidibus vero corpus qui

mnem motum amittet, nisi fuerit elasticum. Quamobrem, si motus tant at in curva vel parte curvae cuspidibus carente, motus corporis equabilis. Q. E. D.

COROLLARIUM 1

59. Patietur quidem corpus celeritatis decrementum, quoties direction utare cogitur, hoc vero differentiali secundi gradus aequivalet ideoq tiamsi integretur, decrementum tamen infinite parvum producit.

COROLLARIUM 2

60. Si scilicet corporis celeritas fuerit c et radius osculi $MO = r$, ecrementum celeritatis, dum corpus elementum ds percurrit, $= \frac{c\,ds^2}{2r^2}$ (§ 1

SCHOLION

61. Demonstratio huius propositionis prorsus congruit cum demonst one primae propositionis neque aliud est discrimen, nisi quod corpus asu in data linea moveri cogatur, hoc vero casu super superficie data v uaerendae habeat libertatem. Quamobrem omnes annotationes, quae ci rimam propositionem sunt factae, hic quoque valent. Videbimus ou uamnam viam corpus in superficie quacunque motum percurrere debeat.

PROPOSITIO 8

THEOREMA

62. *Via* DMm (Fig. 7, p. 22), *quam corpus super superficie quacunque A otum describit, est linea brevissima, quae inter terminos D et M duci potest cilicet corpus in vacuo moveatur et a nullis potentiis sollicitetur.*

DEMONSTRATIO

Descripserit corpus iam curvam DM; manifestum est corpus ex ngente Mn esse progressurum, nisi in superficie perseverare uia igitur motus per Mn fieri non potest, resolvatur i uorum alter in ipsa superficie sit dispositus, alterius ver

ficiem sit perpendicularis atque ideo penitus non in effectum
Hanc ob rem ex n in superficiem demittatur perpendiculum
Mm elementum, in quo corpus ex M progredietur. Planum
quo posita sunt et elementum mM et id, quod a corpore i
est descriptum, erit normale in superficiem. At linea brevis
superficie ducta hanc habet proprietatem, ut planum, in quo
quaeque elementa contigua, sit in superficiem normale. Qu
DMm, quae a corpore describitur, est linea brevissima in s
Q. E. D.

COROLLARIUM 1

63. Si ergo ex puncto A, in quo motus incipit, linea
superficie ABC secundum directionem motus ducatur, habe
corpus motu uniformi movebitur.

COROLLARIUM 2

64. Quia filum tensum in superficie lineam brevissimam de
filum tensum simul viam, in qua corpus super ea superficie

COROLLARIUM 3

65. Si igitur superficies proposita fuerit plana, corpus
describet, quia haec in plano est linea brevissima. Atqu
sphaerica corpus in circulo maximo movebitur.

COROLLARIUM 4

66. Quia planum, in quo posita sunt duo curvae DMm
tigua, normale est in superficiem, radius osculi curvae vero i
sit positus et in curvam normalis, erit radius osculi curvae
normalis in superficiem.

SCHOLION

67. Quemadmodum in quavis superficie linea brevissima
a me primum ostensum est in Tomo III Comment. Acad.

1) L. EULERI Commentatio 9 (indicis ENESTROEMIANI): *De linea brevis quaecunque duo quaelibet puncta iungente*, Comment. acad. sc. Petrop. 3 (17
LEONHARDI EULERI Opera omnia, series I, vol. 25. P. St.

um autem ibi ex alio principio lineam brevissimam determinaverim at
aec materia elementis nondum sit inserta, sequenti propositione line
ınc brevissimam seu eam, quae a corpore describitur, determinare consti

PROPOSITIO 9

PROBLEMA

68. *In superficie quacunque determinare lineam, quam corpus a nullis
ntiis sollicitatum, quod super ea movetur, describit.*

SOLUTIO

Ad naturam superficiei propositae exprimendam sumatur pro arbit
lanum APQ fixum (Fig. 8) in eoque recta AP pro axe. Tum ex qu
ıperficiei puncto M demittatur in hoc lanum perpendiculum MQ et ex Q in xem AP perpendicularis QP. Positis ınc $AP = x$, $PQ = y$ et $QM = z$ atura superficiei dabitur per aequaonem inter has tres variabiles x, y et z constantes. Sit huius aequationis fferentialis

$$dz = Pdx + Qdy,$$

x qua linea brevissima in hac supercie seu linea, quam corpus describit, eterminari debet. Haec linea vero ex oc determinatur, quod eius radius sculi in ipsam superficiei normalem ıcidat. Quamobrem primo normalem

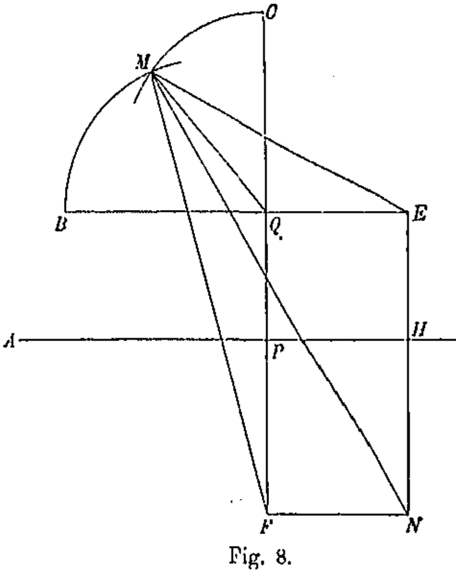


Fig. 8.

ıperficiei et deinde cuiusque in ea ductae curvae radium osculi determi
imus, quo postmodum ex coincidentia harum linearum natura lineae qu
tae possit concludi.

Ad normalem in superficiem inveniendam secetur primo superficies pl
MQB, existente BQ recta in plano APQ parallela axi AP, prodeatque
ac sectione curva BM; cuius natura exprimetur hac aequatione $dz = P$

quae ex locali pro superficie $dz = Pdx + Qdy$ oritur posita y
$dy = 0$. Ducatur ad hanc curvam BM normalis ME rectae
in E occurrens; erit subnormalis $QE = \frac{zdz}{dx} = Pz$. Ducta nunc
diculari ad BE quaevis recta MN a M ad NE ducta normali
vam BM. Simili modo superficies secetur plano PQM proc
CM, cuius natura exprimetur aequatione inter z et y manente
quae erit $dz = Qdy$. Sit MF normalis in hanc curvam; eri
$QF = \frac{-zdz}{dy} = -Qz$; signo negativo utor, quia subnormalem
cadere pono. Ducta nunc recta FN parallela axi AP quaevi
ad FN ducta normalis erit in curvam CM. Recta MN e
punctum intersectionis N rectarum FN et EN cadit, perp
utramque curvam BM et CM et hanc ob rem perpendicularis
ficiem. Locus ergo normalis invenitur sumendo

$$AH = x + Pz \quad \text{et} \quad HN = -Qz - y.$$

Ad determinandam vero radii osculi cuiusvis curvae in s
ductae positionem sint duo curvae elementa Mm et $m\mu$ (F

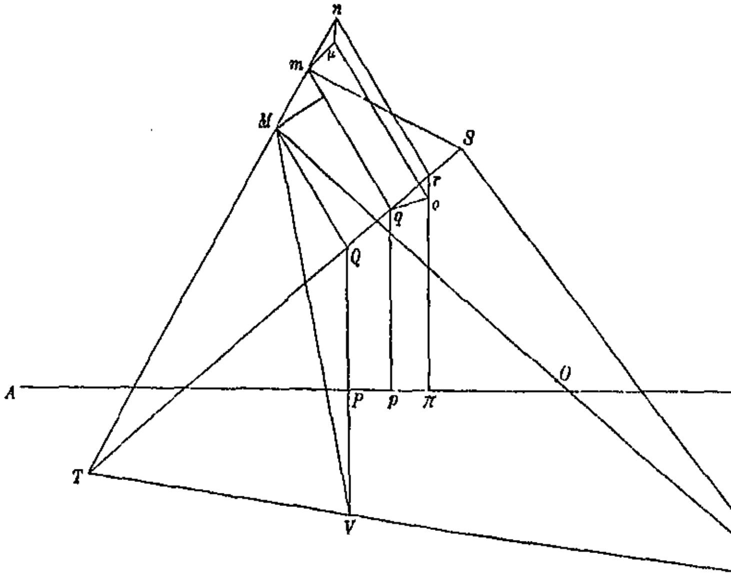


Fig. 9.

respondeant in plano APQ elementa Qq, $q\rho$ atque in axe AP
menta Pp, $p\pi$, quae sint aequalia. Erit ergo

$Pp = p\pi = dx, \quad pq = y + dy, \quad \pi\varrho = y + 2dy + ddy, \quad Qq = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$

$$q\varrho = \sqrt{(dx^2 + dy^2)} + \frac{dyddy}{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}},$$

$$qm = z + dz, \quad \varrho\mu = z + 2dz + ddz, \quad Mm = \sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}$$

t

$$m\mu = \sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)} + \frac{dyddy + dzddz}{\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}}.$$

roducantur Qq et Mm utrinque, quarum illa ipsi $\pi\varrho$ in r, haec vero i n normali in planum APQ in n occurrat, eritque ob $Pp = p\pi$

$$qr = Qq \quad \text{et} \quad mn = Mm \quad \text{atque} \quad \pi r = y + 2dy \quad \text{ac} \quad rn = z + 2dz.$$

am ad elementum Mm ducatur in plano Qm normalis mS occurrens ipsi roductae in S; erit

$$QS = \frac{(qm - QM)\,QM}{Qq} = \frac{zdz}{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}.$$

ucta iam SR in plano APQ perpendiculari ad QS omnes rectae ex m R ductae normales erunt ad elementum Mm. In his igitur normalib rit radius osculi curvae $Mm\mu$. Ea vero harum normalium congruet c adio osculi, quae in eo sita erit plano, in quo posita sunt elementa Mm μ. Quamobrem hoc planum determinari oportet. In hoc vero plano su ementa mn et $n\mu$; ambo itaque usque ad planum APQ producta dabu ntersectionem illius plani cum plano APQ. At nm vel mM occurrit pla PQ in T, ubi cum elemento Qq producto concurrit. Est igitur

$$QT = \frac{z\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{dz}.$$

psi $n\mu$ parallela MV in plano $mn\mu$ erit sita; haec vero MV in planu PQ incidet in V dabiturque QV ex analogia hac

$$(rn - \varrho\mu) : r\varrho = QM : QV;$$

rit itaque

$$QV = \frac{zddy}{ddz}.$$

Hanc ob rem recta TV producta erit intersectio plani $nm\mu$ cum plano AP uare recta MR, quae in concursum rectarum SR et TV est ducta, e mul normalis in Mm et posita in plano $nm\mu$ eritque propterea MR p

sitio radii osculi curvae in M. Ex his punctum R hoc modo
bitur: erit, ducta RX perpendiculari in AP productam,

$$AX = \frac{zdx(dyddy + dzddz)}{(dx^2 + dy^2)ddz - dydzddy} + x$$

atque

$$XR = \frac{zdx^2ddy + zdz(dzddy - dyddz)}{(dx^2 + dy^2)ddz - dydzddy} - y.$$

Quo igitur normalis in superficiem MN in radii osculi curvae
incidat, debet esse $AH = AX$ et $XR = HN$; unde erit

$$P(dx^2 + dy^2)ddz - Pdydzddy = dxdyddy + dxdzddz$$

et

$$-Q(dx^2 + dy^2)ddz + Qdydzddy = dx^2ddy + dz^2ddy - dzdy$$

Quae quidem aequationes inter se congruunt; fiet enim ex iis con

$$Pdx + Qdy = dz,$$

quae est ipsa aequatio naturam superficiei exponens. Harum ig
tionum alterutra cum hac $dz = Pdx + Qdy$ coniuncta dabit
corpore in proposita superficie percursam. Q. E. I.

COROLLARIUM 1

69. Erit igitur pro linea in superficie proposita descripta

$$ddz : ddy = Pdydz + dxdy : Pdx^2 + Pdy^2 - dxdz.$$

At quia est $dz = Pdx + Qdy$, erit

$$ddz : ddy = Pdz + dx : Pdy - Qdx$$

seu

$$Pdyddz - Qdxddz = Pdzddy + dxddy.$$

COROLLARIUM 2

70. Si assumatur altera aequatio et utrinque subtrahatur

$$Qdz^2ddz - dy^2ddy,$$

habebitur

$$- Q(dx^2 + dy^2 + dz^2)ddz + Qdydzddy + dy^2ddy$$
$$= (dx^2 + dy^2 + dz^2)ddy - Qdz^2ddz - dzdyddz.$$

e habetur

$$\frac{ddy + Qddz}{dy + Qdz} = \frac{dyddy + dzddz}{dx^2 + dy^2 + dz^2}.$$

o est illa ipsa aequatio, quam pro linea brevissima in quacunque super- dedi in Comm. Acad. Petr. Tom. III.

SCHOLION 1

71. Ut in hoc casu, quo corpus a nulla potentia sollicitatur, directio radii li cum normali in superficiem congruere debet, ita in aliis casibus, ndo corpus sollicitatur a potentiis, hae lineae datum angulum constituere

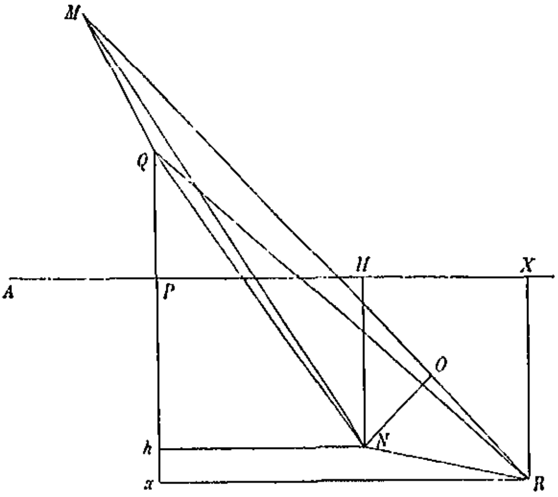


Fig. 10.

ent. Quamobrem ad hunc angulum generaliter inveniendum sit MN . 10) normalis in superficiem et MR directio radii osculi; erit, ut iam posuimus vel invenimus,

$$PQ = y, \quad QM = z, \quad PH = hN = Pz, \quad Qh = -Qz,$$

$$PX = Rx = \frac{zdx(dyddy + dzddz)}{(dx^2 + dy^2)ddz - dydzddy}$$

$$Qx = \frac{zdx^2ddy + zdz(dzddy - dyddz)}{(dx^2 + dy^2)ddz - dydzddy}.$$

Ducta NR ex N in MR demittatur perpendiculum NO; erit

$$MO = \frac{MR^2 + MN^2 - NR^2}{2MR} = \frac{MQ^2 + Rx \cdot Nh + Qx \cdot Q}{MR}$$

et

$$NO = \frac{\sqrt{(MR^2 \cdot MN^2 - (MQ^2 + Rx \cdot Nh + Qx \cdot Qh)^2)}}{MR}$$

$$= \frac{\sqrt{(MQ^2(Qx - Qh)^2 + MQ^2(Rx - Nh)^2 + (Rx \cdot Qh - Qx \cdot Nh}}{MR}$$

Anguli vero RMN tangens est $= \frac{NO}{MO}$ posito sinu toto $=$ autem supra assumtis symbolis et in subsidium vocata aequat

$$dz = Pdx + Qdy$$

prodibit tangens anguli NMR

$$= \frac{ddy(dx + Pdz) - ddz(Pdy - Qdx)}{(ddz - Qddy)\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}}.$$

Hoc ergo angulo evanescente fit

$$ddz : ddy = Pdz + dx : Pdy - Qdx$$

ut supra (§ 69).

SCHOLION 2

72. Ipsa vero radii osculi longitudo MO (Fig. 9, p. 2 angulo $nm\mu$ ope huius analogiae: ut sinus anguli $nm\mu$ ad si Mm ad MO. Est vero

$$n\mu = \sqrt{(ddy^2 + ddz^2)} \quad \text{et} \quad mn - m\mu = \frac{-dyddy - d}{\sqrt{(dx^2 + dy^2 +}}$$

ergo perpendiculum ex n in $m\mu$ productum

$$= \frac{\sqrt{(dx^2ddy^2 + dz^2ddy^2 + dx^2ddz^2 + dy^2ddz^2 - 2dydzddy}}{\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}}$$

Quare hoc perpendiculum est ad $\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}$ ut $\sqrt{(}$ ad MO, unde prodit radius osculi

$$MO = \frac{(dx^2 + dy^2 + dz^2)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{(dx^2(ddy^2 + ddz^2) + (dyddz - dzddy)^2)}}.$$

autem radio osculi opus erit in sequente propositione, in qua pressio , quam corpus in superficiem exercet, investigabimus.

SCHOLION 3

73. Ex hac generali radii osculi expressione orietur ea pro radio oscul ae brevissimae, si coniungatur cum hac aequatione

$$ddz = \frac{ddy(Pdz + dx)}{Pdy - Qdx} \quad \text{et locali} \quad dz = Pdx + Qdy.$$

libit autem radius osculi

$$= \frac{(dx^2 + dy^2 + dz^2)(Pdy - Qdx)}{dxddy\sqrt{(P^2 + Q^2 + 1)}} = \frac{(dx^2 + dy^2 + dz^2)\sqrt{(P^2 + Q^2 + 1)}}{ddz - Qddy}$$

$$= \frac{(dx^2 + dy^2 + dz^2)\sqrt{(P^2 + Q^2 + 1)}}{dPdx + dQdy}.$$

ae haec expressio dat radium osculi curvae in superficie proposita riptae a corpore a nullis potentiis sollicitato.

PROPOSITIO 10

THEOREMA

74. *Pressio, quam corpus in superficie motum et a nullis potentiis sollicitatum psam superficiem exercet, fit normaliter in eam versus eius convexitatem et s t ad vim gravitatis ut altitudo celeritati corporis debita ad dimidium radi li curvae a corpore descriptae.*

DEMONSTRATIO

Sit DMm (Fig. 7, p. 22) curva in superficie ABC a corpore descripta udo celeritati corporis debita $= v$ et radius osculi curvae $MO = r$. Quia us ex M, si libere moveri posset, progrederetur in elemento Mn, super

ficies vero efficit, ut per elementum Mm incedat existen superficiem, superficies a corpore secundum directionem vi, quanta opus est ad corpus ex directione Mn in di hendum. Hoc vero praestatur a vi $\frac{2v}{r}$ normaliter in s dum directionem radii osculi MO agente. Quamobre superficiem erit normalis, quippe agens secundum existente vi gravitatis corporis $=1$. Q. E. D.

COROLLARIUM 1

75. Haec est igitur vis centrifuga, quam corpus modo exercet, quo in lineam datam, in qua moveri co

SCHOLION 1

76. Pressio in superficiem necessario debet esse esset normalis, resolvi posset in duas, quarum altera in ipsa superficie posita. Harum vero normalis tantum ficiem impenditur, dum altera ipsum corporis motum i

COROLLARIUM 2

77. Longitudinem radii osculi r lineae, quam co sollicitatum super proposita superficie describit, inven assumta erit vis centrifuga

$$=\frac{2v(ddz-Qddy)}{(dx^2+dy^2+dz^2)\sqrt{(P^2+Q^2+1)}}=\frac{2v(dPdx\cdots}{(dx^2+dy^2+dz^2)\cdots}$$

SCHOLION 2

78. De hac vi centrifuga in superficiem exercita quae supra de vi centrifuga in datam curvam sunt § 20 cum annexis coroll. et schol. Linea enim bre super superficie percurrit, instar canalis considerari moveatur, atque tum de motu in hoc canali omnia motu super data linea nullis agentibus potentiis sunt

PROPOSITIO 11

PROBLEMA

79. *Determinare effectum cuiusvis potentiae, quem exerit in corpus su ta superficie motum tam in vacuo quam in medio resistente.*

SOLUTIO

Quaecunque sit directio potentiae sollicitantis corpus, ea resolvi pot tres potentias laterales, quarum primae, quam vocabimus M, directio n alis in superficiem, secundae, quam per N designabimus, directio norma m in directionem motus corporis quam in directionem potentiae M, cu itur directio erit in plano tangente superficiem, tertiae potentiae T app tae directio congruat cum directione motus, quae igitur erit vis tangentia iores vero erunt vires normales. Quia nunc harum trium virium directio nt inter se normales, nullius effectus a reliquis perturbari poterit. Qu nem effectum quaeque producat, investigabimus.

Prima potentia M, cuius directio in superficiem est normalis, null ibebit effectum in immutando corporis motu, sed tota impendetur ressionem superficiei. Augebit igitur vel diminuet pressionem a vi contrif rtam, prout eius directio in plagam convexae partis superficiei incidit plagam partis concavae. Incidat ea in partem interiorem; erit tot ressio in superficiem versus partes exteriores

$$= \frac{2v(dPdx + dQdy)}{(dx^2 + dy^2 + dz^2)\sqrt{(P^2 + Q^2 + 1)}} - M$$

§ 77). Pressio enim a vi contrifuga orta minuetur hoc casu potentia M.

Secunda potentia N, quia eius directio in ipsa superficie est posita ormalis in directionem corporis, corporis directionem tantum immut eleritatem neque augendo neque minuendo. Haec vis igitur corpus a li revissima deducet facietque, ut non amplius in plano ad superficiem nor noveatur; huius igitur plani, in quo corpus movebitur, inclinationem lanum lineae brevissimae normale in superficiem investigari oportet. H ero inclinationis angulo aequalis est angulus, quem radius osculi lin escriptae cum normali in curvam constituit quemque ante generaliter de

minavimus (§ 71). Postquam corpus elementum Mm celor
debita descripsit, progrederetur, nisi a vi N sollicitaretur

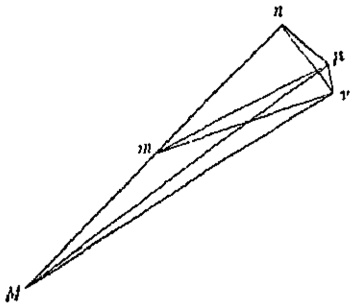


Fig. 11.

$m\nu$ (Fig. 11) in ν, ita ut
duo elementa lineae brevissi
plano ad superficiem norm
vis N normalis in planum
$\nu\mu$; corpus igitur hac vi
sursum reducetur, si quider
vim N sursum esse direct
torum positione, ut in figu
Efficiat ergo haec vis, ut
mentum $m\mu$ moveatur an
directione $m\nu$ deflectat. Huic angulo respondet radius oscu
cum vis N hunc angulum generet celeritasque curvae debit
erit ex effectu virium normalium

$$N = \frac{2v\cdot\mu\nu}{m\nu^2} \quad \text{ideoque} \quad \mu\nu = \frac{N\cdot m\nu^2}{2v}.$$

Quo nunc inclinatio plani $Mm\mu$, in quo corpus actu move
$Mm\nu$, quod in superficiem est normale, inveniatur, demitt
mentum Mm productum perpendiculum νn; erit μn quoqu
diculare ideoque angulus $\mu n\nu$ erit angulus inclinationis
planum νmM; atque cum $\mu\nu$ sit normalis ad νn, huius
erit $= \frac{\mu\nu}{n\nu} = \frac{N\cdot m\nu^2}{2v\cdot n\nu}$. At $n\nu$ determinatur ex inclinatione e
et $m\nu$ seu radio osculi lineae brevissimae, cuius Mm et m
Sit hic radius osculi r, erit $\frac{m\nu^2}{n\nu} = r$ ideoque tangens anguli

$$= \frac{Nr}{2v} = \frac{N(dx^2 + dy^2 + dz^2)\sqrt{(P^2 + Q^2 + 1)}}{2v(dPdx + dQdy)}$$

substituto loco r valore invento (§ 73). Huic vero angulo
gulus, quem radius osculi elementorum Mm, $m\mu$ a corpore
constituit cum radio osculi elementorum Mm, $m\nu$ seu
superficiem. Huius autem anguli tangentem supra invenim
facta aequatione habebimus

$$\frac{ddy(dx + Pdz) - ddz(Pdy - Qdx)}{(ddz - Qddy)\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}} = \frac{N(dx^2 + dy^2 + dz^2)\sqrt{(P}}{2v(dPdx + dQ}$$

ıa aequatione effectus potentiae N determinatur. Seu cum sit

$$ddz - Qddy = dPdx + dQdy,$$

ıbebitur ista aequatio

$$ddy(dx + Pdz) - ddz(Pdy - Qdx) = \frac{N(dx^2 + dy^2 + dz^2)^{\frac{3}{2}} \sqrt{(P^2 + Q^2 + 1)}}{2v}.$$

Tertia potentia T, quia in directione corporis est posita, celeritate ntum vel auget vel diminuit. Ponamus eam esse accelerantem, exprimet us effectus hac aequatione

$$dv = T\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}.$$

tque si motus in medio fiat resistente resistentiaque sit $= R$, minuen ntum est vis tangentialis T resistentia R. Quamobrem habebitur

$$dv = (T - R)\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}.$$

E. I.

COROLLARIUM

80. Ex duabus igitur aequationibus, quarum altera v, altera dv dete inat, una conflatur v non amplius continens, quae cum locali pro superfic $z = Pdx + Qdy$ coniuncta determinat curvam, quam corpus super proposi ıperficie describit.

SCHOLION 1

81. De potentia N bene est attendendum, in quam plagam tend o. an ad dextram an ad sinistram regionem corporis moti vergat. P ac enim differentia tangens anguli $\mu n \nu$ vel affirmativa vel negativa c ccipienda. De hoc vero non erimus hic solliciti, sed ulteriorem huius ı squisitionem in caput ultimum huius libri differemus.

SCHOLION 2

82. Ad sequens igitur caput secundum progredimur, in quo motu orporis super data linea in vacuo examinabimus. Capite tertio vero mot ıper data linea in medio resistente investigabimus. Quarto denique cap ıotum super data superficie tam in vacuo quam in medio resisten rutabimur.

CAPUT SECUNDUM

DE MOTU PUNCTI SUPER DATA LINEA I

PROPOSITIO 12

PROBLEMA

83. *Sollicitetur corpus, quod super curva AM* (Fig. 12) *n*
potentia MF, cuius directio sit parallela axi AP; determinare c
in singulis punctis atque tempus, quo curvae quaevis portio des
pressionem, quam curva in singulis punctis patitur.

SOLUTIO

Descripserit corpus iam arcum AM sitque eius celer
altitudini b atque celeritas in M debita altitudini v. Positi

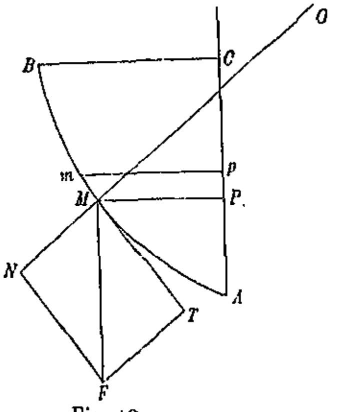


Fig. 12.

$PM = y$ et arcu $AM = s$ res
MF, quae sit p, in laterales,
MN et tangentialem MT; erit

$$ds : dx = MF : MT \quad \text{et} \quad ds : d$$

Hinc igitur prodibit vis tangen
et vis normalis $MN = \frac{pdy}{ds}$. P
vim tangentialem celeritatem c
erit ergo

$$dv = -pdx \quad \text{atque} \quad v =$$

(§ 42). Sumto autem integrali $\int pdx$ ita, ut evanescat posit

$$v = b - \int pdx;$$

: qua aequatione corporis celeritas in singulis punctis cognoscitur. Ex ead
equatione innotescit quoque tempus, quo arcus AM absolvitur; posito e
mpore t erit

$$t = \int \frac{ds}{\sqrt{(b - \int p\,dx)}}.$$

is normalis $MN = \frac{p\,dy}{ds}$ tota impenditur in curvae pressionem secund
N (§ 39), augebit ergo pressionem a vi centrifuga ortam, quia MN
ppositam radii osculi MO plagam cadit. Quare, cum posito radio os
$O = r$ vis centrifuga sit $= \frac{2v}{r}$ (§ 20), erit totalis pressio in curvam iu
$N = \frac{p\,dy}{ds} + \frac{2v}{r}$. Q. E. I.

COROLLARIUM 1

84. Celeritas in M igitur tanta est, quanta foret in P, si corpus cad
eleritate initiali $\sqrt{b}$ per AP eadem in singulis altitudinibus potentia p
citatum ascendisset.

COROLLARIUM 2

85. Celeritas igitur non pendet a natura curvae, sed tantum ab alt
ine, quam corpus percurrit. Si nimirum altitudinis elementum fuerit
rit $dv = -p\,dx$ vel $dv = p\,dx$, prout corpus vel ascendit vel descendit.

COROLLARIUM 3

86. Cum sit $v = b - \int p\,dx$, si sumatur abscissa x tanta uti AC,
ua sit $\int p\,dx = b$, erit corporis in illa altitudine B celeritas $= 0$. Cor
gitur in B usque ascendit ibique quiescet; continuo vero ex B descen
er BMA.

COROLLARIUM 4

87. Si ascensus per AMB cum ascensu rectilineo per APC compare
rit tempus per elementum Mm ad tempus per Pp ut Mm ad Pp, i. e.
s ad dx.

COROLLARIUM 5

88. Quare si linea AMB fuerit recta, ob rationem Mm ad Pp c
stantem erit tempus per AM ad tempus per AP in constanti ratione, non
ea, quam habet sinus totus ad cosinum anguli A, seu quam habet longitu
AB ad AC.

COROLLARIUM 6

89. Posito elemento Pp constante est radius osculi

$$r = \frac{-ds^3}{dxddy}$$

ideoque vis centrifuga

$$= -\frac{2vdxddy}{ds^3} = \frac{-2(b-\int pdx)dxddy}{ds^3}.$$

Quare pressio totalis erit

$$= \frac{pds^2dy - 2(b-\int pdx)dxddy}{ds^3}.$$

SCHOLION 1

90. Quemadmodum in hoc problemate ex datis curva et potentia so
citante inventa sunt celeritas in singulis punctis, tempus per quemvis arc
et pressio in singula curvae puncta, ita ex harum quinque rerum dual
quibusque datis reliquae tres possunt inveniri. Ex quo decem nascon
problemata, quae omnia solutionem ex huius problematis solutione habebu

SCHOLION 2

91. Similiter habebuntur decem huiusmodi quaestiones, si directio
potentiae sollicitantis non fuerint parallelae, sed vel convergentes ad contr
virium vel alio modo determinatas directiones habentes. At si etiam direc
inter quaesita ponatur, tunc ob sex res in computum ducendas ex ter
quibusque reliquae tres invenientur; hincque viginti orientur problemata.

SCHOLION 3

92. Orientur porro problemata indeterminata, ut si loco temporis
quamvis curvae portionem tantum integrum tempus per AMB daretur; t

im infinitae solutiones locum haberent. Praeterea si plures descensus census integri considerentur super eiusdem curvae variis partibus eorum tio detur, numerus quaestionum multo magis augebitur. Ad hoc g rtinet quaestio de invenienda curva, super qua omnes descensus ad da unctum fiant eodem tempore, quas tanquam difficillimas ultimo pertractabi unc autem primum curvam et potentiam sollicitantem tanquam datas piemus et problemata eo pertinentia solvemus. Deinceps vero ex aliis emadmodum reliqua sint invenienda, monstrabimus.

PROPOSITIO 13

PROBLEMA

93. *Si potentia sollicitans fuerit uniformis et ubique deorsum tendat, d inare descensum corporis super data curva AM* (Fig. 13) *in A ex quiete pientem atque pressionem, quam curva in singulis punctis M sustinet.*

SOLUTIO

Ducta verticali AP seu parallela directionibus potentiae MF atque icata rectangula MP sit $AP = x$, $PM = y$, curva $AM = s$. Ponatur ntia $MF = g$ existente vi gravitatis $=1$ et celeritas M debita altitudini v. His positis erit vis normalis $\frac{gdy}{ds}$ et vis tangentialis $= \frac{gdx}{ds}$ (§ 83). Quia hoc casu s tangentialis accelerat, erit $dv = gdx$ et

$$v = gx$$

o celeritatem in A $= 0$. Deinde quia radius osculi MO directus est $= \frac{+ds^3}{dxddy}$ posito dx constante, it vis centrifuga $= \frac{+2vdxddy}{ds^3}$, cuius directio est MN. ecundum eandem plagam vero premit vis noralis $\frac{gdy}{ds}$. Quare tota pressio, quam curva in M sustinet secund N, est

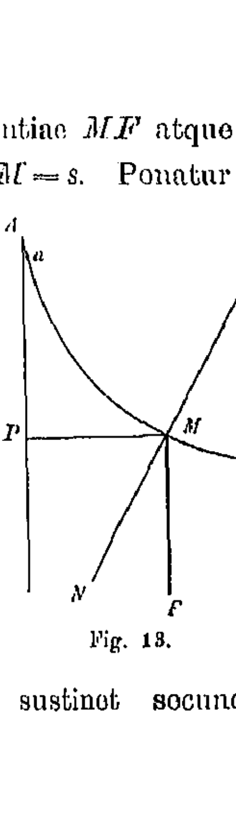


Fig. 13.

$$= \frac{gdy}{ds} + \frac{2vdxddy}{ds^3} = \frac{gdy}{ds} + \frac{2gxdxddy}{ds^3}$$

ob $v = gx$. Tempus vero, quo corpus arcum AM percurri
Q. E. I.

COROLLARIUM 1

94. Celeritas igitur in M tantum ab altitudine AP, per
pendet atque tanta est, quantam idem corpus ex A in P
eadem potentia g sollicitatum acquirit.

COROLLARIUM 2

95. In quacunque igitur curva corpus a potentia unifor
ex quiete descendat, celeritates erunt radicibus quadratis ex a
cursis proportionales; est enim celeritas ut $\sqrt{v}$, i. e. ut $\sqrt{gx}$.

COROLLARIUM 3

96. Tempus, quo primum elementum Aa percurritur, e
cente x. Si igitur angulus PAa fuerit recto minor seu $s =$
per Aa infinite parvum ideoque tempus AM finitum, nisi cu
inter A et M supra A vel in infinitum progrediatur. At
fuerit rectus, erit ipso puncto A $s^n = \alpha x$ existente n numero
ideoque

$$\sqrt{gx} = s^{\frac{n}{2}} \sqrt{\frac{g}{\alpha}} \quad \text{et} \quad \int \frac{ds}{\sqrt{gx}} = \frac{2s^{\frac{2-n}{2}}}{2-n} \sqrt{\frac{\alpha}{g}}.$$

Quare si n fuerit binario minor, tempus per Aa erit infinite pa
per AM finitum. At si $n = 2$ vel > 2, tempus per primum
erit infinite magnum seu corpus ex A nunquam egredietur.

COROLLARIUM 4

97. Quoties autem $n < 2$, toties radius osculi in A est
Quare in casu, quo tangens curvae in A ad AP est norma
descendet, nisi radius osculi in A fuerit infinite parvus.

SCHOLION 1

98. Ex eo, quod primum elementum tempore infinite parvo percurrit, cto concluditur tempus per arcum AM esse finitum; cum enim corpus m celerato per AM descendat, multo celerius sequentia elementa describen hanc ob rem tempus debebit esse finitum. Exemplis autem sequenti nnia illustrabuntur.

EXEMPLUM 1

99. Sit linea AM (Fig. 14) recta utcunque inclinata ad verticalem que cosinus ang. $A = n$; erit $x = ns$. Tempus ergo, quo corpus per scendit, erit

$$= \int \frac{ds}{\sqrt{gns}} = \frac{2\sqrt{s}}{\sqrt{gn}} = \frac{2\sqrt{AM}}{\sqrt{gn}} = \frac{2AM}{\sqrt{g \cdot AP}}$$

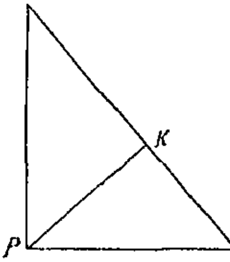


Fig. 14.

a tempus per lineam utcunque inclinatam est directe radix ex ipsa linea et inverse ut radix ex cosinu guli inclinationis MAP. Vis centrifuga erit autem 0, quare linea AM tantum a vi normali premitur, ae est

$$= g\sqrt{(1-n^2)} = \frac{g \cdot PM}{AM}.$$

COROLLARIUM 5

100. Tempus ergo per AM est ad tempus per AK ut $\sqrt{AM}$ ad $\sqrt{A}$ tempus per AM est ad tempus per AP ut AM ad AP (§ 88). Quare erit $AM : AP = \sqrt{AM} : \sqrt{AK}$ seu $AM : AP = AP : AK$, quod evenit, si t in AM perpendicularis, tum tempus descensus per AK aequale est te ri descensus per AP.

COROLLARIUM 6

101. Patet etiam tempus descensus per perpendiculum PK aequale e mpori descensus per AP. Est enim cosinus anguli $APK = \frac{PK}{AP}$. Qua m sit tempus per AP ad tempus per KP ut $\frac{\sqrt{AP}}{\sqrt{1}}$ ad $\sqrt{KP} : \sqrt{\frac{PK}{AP}}$, ec ratio aequalitatis.

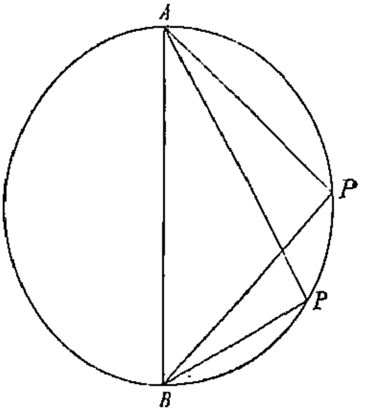


Fig. 15.

COROLLARIUM 7

102. Ex hoc perspici
$APPB$ (Fig. 15) omnes
chordas AP ex puncto su
nec non omnes descensu
ad punctum infimum B d
fieri temporibus, eo scilice
corpus per diametrum A
riter delabitur.

EXEMPLUM 2

103. Si curva AMB (Fig. 16) fuerit circulus ac radius
tangat circulum, erit

$$(a-y)^2+x^2=a^2 \quad \text{seu} \quad y=a-\sqrt{(a^2-x^2)}.$$

Habebitur ergo $ds = \frac{adx}{\sqrt{(a^2-x^2}}$

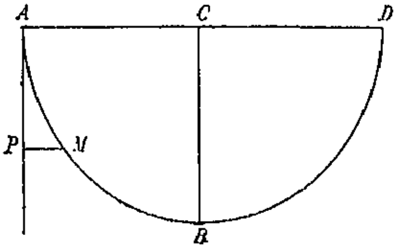


Fig. 16.

et $r=a$ erit vis centrifuga

$$=\frac{2gx}{a}$$

atque ob $dy=\frac{xdx}{\sqrt{(a^2-x^2)}}$ tota
circulus in M sustinet,

$$=\frac{3gx}{a}.$$

Triplo igitur maior est tota pressio quam sola vis normalis.

Tempus deinde, quo arcus AM percurritur, est

$$=\int\frac{adx}{\sqrt{g(a^2x-x^3)}},$$

a circuli nec hyperbolae quadratura p
elasticae construi potest. Tempus int

$$=2\sqrt{\frac{a}{g}}\times\left(1+\frac{1}{2\cdot5}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4\cdot9}+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6\cdot13}+\text{etc.}\right)$$

COROLLARIUM 8

4. Cum corpus ad infimum punctum B pervenerit, ibi habebit celeri-altitudini ga debitam. Hac igitur ascendet in altero quadrante BD etque ad D, ubi eius celeritas evanescet, ideoque rursus descendet ad que ad A per BA reascendet. Similis vero erit ascensus descensui adrantem, quia corpus, sive ascendat sive descendat, in iisdem punctis habet celeritatem.

SCHOLION 2

5. Alia exempla non afferimus, cum in sequentibus, ubi plures des-ad punctum fixum super data linea considerabimus, plura simus alla-Nunc vero primum eas quaestiones evolvemus, quae pertinent ad motum data linea ex dato puncto fixo a quiete inceptum, cuius modi est na sequens.

PROPOSITIO 14

PROBLEMA

6. *Si fuerint infinitae curvae similes AM, AM etc.* (Fig. 17) *ex puncto initium sumentes, invenire curvam CMM ab illis curvis arcus AM, AM etc. utem, qui a descendente super iis corpore aequalibus temporibus percurran-tente ut ante potentia sollicitante uniformi et ubique deorsum directa.*

SOLUTIO

infinitis curvis datis sumatur una quae-AM, cuius parameter sit a. Positoque x, $PM = y$ et arcu $AM = s$ et existente potentia sollicitante $= g$ descendat corpus urva AM; erit celeritas in M debita alti-gx. Tempus ergo descensus super AM erit

$$= \int \frac{ds}{\sqrt{gx}}.$$

ibus ergo curvis AM, AM etc. tanti arcus

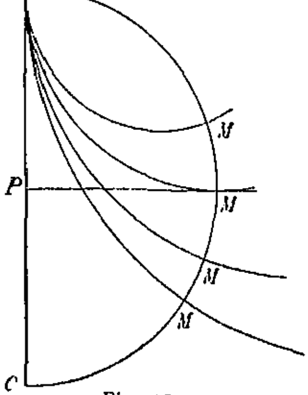


Fig. 17.

sunt abscindendi, ut pro iis sit $\int\frac{ds}{\sqrt{gx}}$ quantitas constans. At curvas referetur, si praeter s et x etiam parameter a pon Posito igitur in $\int\frac{ds}{\sqrt{gx}}$ etiam a variabili quantitas $\int\frac{ds}{\sqrt{gx}}$ pone stanti, nempe ei tempori, quo omnes descensus fieri debent. $= k$, erit

$$k = \int\frac{ds}{\sqrt{gx}}$$

in singulis curvis. Quare si $\int\frac{ds}{\sqrt{gx}}$ ita differentietur, ut etiam natur, hoc differentiale nihilo aequale est ponendum. Ad h inveniendum sit $ds = pdx$ eritque p, quia omnes curvae po functio, in qua a et x nullum dimensionum numerum simul con bimus ergo $\int\frac{pdx}{\sqrt{gx}}$; hoc differentiatum posito quoque a variabi

$$\frac{pdx}{\sqrt{gx}} + qda,$$

quod fieri debet $= 0$. Quantitas q vero sequenti modo inven $k = \int\frac{pdx}{\sqrt{gx}}$, in quantitate k variabiles a et x dimensionum stituent $\frac{1}{2}$. Ostendi autem alibi, in Tom. VII Comment.[1]), t

$$\frac{px}{\sqrt{gx}} + qa = \frac{k}{2}.$$

Ex quo invenitur

$$q = \frac{k}{2a} = \frac{p\sqrt{x}}{a\sqrt{g}}.$$

Habebitur ergo

$$\frac{pdx}{\sqrt{gx}} + qda = \frac{pdx}{\sqrt{gx}} + \frac{kda}{2a} - \frac{pda\sqrt{x}}{a\sqrt{g}} = 0,$$

---

1) Editio princeps: *in Tom. IX Comment.* Dissertatio autem commem Commentatio 44 (indicis ENESTROEMIANI): *De infinitis curvis eiusdem generis venicndi aequationes pro infinitis curvis eiusdem generis*, Comment. acad. sc. I 1740; LEONHARDI EULERI *Opera omnia*, series I, vol. 22. Legitur p. 185 (To „Sin vero fuerit u functio m dimensionum ipsarum a et x atque $du = Rdx + Sda$,

EULERUS hanc dissertationem anno 1734 Academiae exhibuerat, et qui 1726—1729 Tomi I—IV Commentariorum editi erant (annis 1728—1735), co ut pro anno 1734 Tomus IX ederetur; id quod non evenit, quia pro sex an tantum Tomi V—VII editi sunt (annis 1738—1740). P. St.

t aequatio pro curva quaesita. At si aequatio inter coordinatas x et curva CMM desideretur, ex aequatione pro quaque curvarum AM osius a in x et y inventus substitui debet. Q. E. I.

COROLLARIUM 1

7. Aequatio etiam primo inventa

$$\frac{pdx}{\sqrt{gx}} = \frac{pda\sqrt{x}}{a\sqrt{g}} - \frac{kda}{2a}$$

ad curvam CMM inveniendam. Nam pro quavis abscissa $AP = x$ nvenitur a parameter eius curvae AM, cuius punctum M respondens e abscissae x est in curva quaesita CMM.

COROLLARIUM 2

8. Cum autem haec aequatio sit differentialis ideoque ad plures curvas nstante, quae adiicitur, pertineat, notandum est in additione constantis ntum solutioni esse convenientem, quae pro data curva seu pro dato a valore det abscissam x tantum arcum AM abscindentem, qui tem- descensu absolvatur.

COROLLARIUM 3

9. Si tempus k aequale esse debeat tempori descensus per verticalem b, erit $k = \frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{g}}$. Quo valore substituto habebitur aequatio

$$\frac{pdx}{\sqrt{x}} = \frac{pda\sqrt{x}}{a} - \frac{da\sqrt{b}}{a}.$$

s integratione id est faciendum, ut curva per punctum C transeat.

SCHOLION 1

0. Erit autem semper recta verticalis AC species curvarum AM; quae si parameter a vel infinite magna vel infinite parva accipiatur. Quare dissimo tempus constans k per descensum per verticalem AC, quippe

speciem curvarum AM, exprimitur. Atque in constructione aequ
ventae

$$\frac{pdx}{\sqrt{x}} = \frac{pda\sqrt{x}}{a} = \frac{da\sqrt{b}}{a}$$

tanta constans est addenda, ut posito $x = b$ fiat a vel infinitum
prout ille vel iste valor ipsius a rectae AC respondeat.

SCHOLION 2

111. Si $\frac{ds}{\sqrt{gx}}$ reipsa potest integrari, ne data quidem aequa
est, ad quam inveniendam opus fuit q determinare. Nam si integ
$\frac{ds}{\sqrt{gx}}$ iterum differentietur posito quoque a variabili, reipsa obtinetu
hoc differentiale tantum nihilo aequale esset ponendum. Commod
his casibus problema solvetur, si integrale ipsius $\frac{ds}{\sqrt{gx}}$ statim ipsi
aequale ponatur et loco a eius valor in x et y substituatur ex
pro curvis datis. Atque hoc modo solutio in promtu est non
curvis similibus, sed dissimilibus etiam, si modo tempora descensu
titates finitas exprimi possunt.

EXEMPLUM 1

112. Si omnes hae curvae AM fuerint rectae diversimode ad
AC inclinatae, erit

$$y = nx \quad \text{et} \quad s = x\sqrt{(1 + n^2)},$$

ubi n tanquam parameter est consideranda. Erit ergo

$$\int \frac{ds}{\sqrt{gx}} = \int \frac{dx\sqrt{(1 + n^2)}}{\sqrt{gx}} = \frac{2\sqrt{x(1 + n^2)}}{\sqrt{g}},$$

quod aequale poni debet ipsi $\frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{g}}$. Erit itaque

$$x(1 + n^2) = b.$$

Cum autem n sit quantitas variabilis, ponatur pro ea valor $\frac{y}{x}$ ex

quo facto prodibit pro curva CMM aequatio inter coordinatas ortho-
x et y ista

$$y^2 + x^2 = bx,$$

t pro circulo, cuius diameter est recta $AC = b$.

SCHOLION 3

3. Hic casus est ille ipse casus ante pertractatus (§ 102); ibi enim n est corpus per omnes chordas in circulo ex puncto supremo eductas ous temporibus descendere. Pertinet hic quidem casus non ad curvas sed hoc exemplum attulimus ad casum scholii 2 illustrandum, quia tis hisce tempora descensus finitis quantitatibus exprimuntur. Sequentia vero curvas similes, uti propositio postulat, complectentur.

EXEMPLUM 2

. Sint curvae AM, AM omnes circuli tangentes verticalem AC in A. radius cuiusque eorum $= a$, erit

$$y = a - \sqrt{(a^2 - x^2)} \quad \text{atque} \quad a = \frac{y^2 + x^2}{2y}.$$

uli vero omnes sunt curvae similes, quia a, y et x in aequatione dimensionum numerum tenent seu homogeneitatem complent sola. igitur a tanquam parameter variabilis debet tractari. Habetur autem aequatione

$$ds = \frac{adx}{\sqrt{(a^2 - x^2)}},$$

rit

$$p = \frac{a}{\sqrt{(a^2 - x^2)}}$$

praescriptam habet proprietatem, ut a et x dimensionum numerus us. Hanc ob rem pro curva CMM haec habebitur aequatio

$$\frac{adx}{\sqrt{(a^2x - x^3)}} = \frac{da\sqrt{x}}{\sqrt{(a^2 - x^2)}} - \frac{da\sqrt{b}}{a}$$

oc

$$\frac{da\sqrt{b}}{a} = \frac{xda - adx}{\sqrt{(a^2x - x^3)}}.$$

Quae aequatio construi potest; posito enim $x = au$ pro

$$\frac{da\sqrt{b}}{a\sqrt{a}} = \frac{-du}{\sqrt{(u-u^3)}},$$

in qua indeterminatae sunt a se invicem separatae. inter coordinatas x et y pro curva CMM obtineatur, $\frac{y^2+x^2}{2y}$ et loco da eius differentiale $\frac{y^2dy+2yxdx-x^2dy}{2y^2}$ sequens prodit aequatio differentialis

$$-xdy+ydx = \frac{(y^2dy+2yxdx-x^2dy)\sqrt{}}{y^2+x^2}$$

Quae ita integrari debet, ut posito $x=b$ fiat $y=0$, qui transire debet.

COROLLARIUM 4

115. Ex hac aequatione tangens curvae CMM in s scitur et ex positione tangentis innotescit angulus AM quamlibet datarum intersecat. Erit scilicet tangens

$$= \frac{y}{x-\sqrt{bx}}.$$

Hic ergo angulus est rectus in C ob $x=b$, seu cur est normalis.

COROLLARIUM 5

116. Si b vel maior vel minor accipiatur, curva hocque modo infinitae oriuntur curvae a circulis ar dentes. Haeque curvae omnes inter se erunt similes in aequatione cum x et y homogeneitatem constituit. CMM innumerabiles aliae ex ea construi possunt, abs catis curvae CMM in eadem ratione augendis vel di seu b augetur vel diminuitur.

EXEMPLUM 3

117. Sint curvae AM, AM omnes cycloides cusp tangentes verticalem AC in A. Posita parametro

diametro circuli generatoris $= a$ erit ex natura cycloidis

$$s = a - \sqrt{(a^2 - 2ax)}$$

$$ds = \frac{adx}{\sqrt{(a^2 - 2ax)}}$$

$$dy = \frac{dx\sqrt{2ax}}{\sqrt{(a^2 - 2ax)}}.$$

casu est

$$p = \frac{a}{\sqrt{(a^2 - 2ax)}}$$

sarum a et x nullius dimensionis, ut requiritur. Quare pro curva eritur ista aequatio

$$\frac{adx}{\sqrt{(a^2x - 2ax^2)}} = \frac{da\sqrt{x}}{\sqrt{(a^2 - 2ax)}} - \frac{da\sqrt{b}}{a}$$

$$\frac{xda - adx}{\sqrt{(a^2x - 2ax^2)}} = \frac{da\sqrt{b}}{a}.$$

quatio inter coordinatas orthogonales x et y desideretur, ex aequa-

$$y = \int \frac{dx\sqrt{2ax}}{\sqrt{(a^2 - 2ax)}}$$

differentiali posito quoque a variabili valor ipsius a debet sub- aec vero aequatio differentiata posito a quoque variabili dat

$$ady - yda = \frac{adx\sqrt{2ax} - xda\sqrt{2ax}}{\sqrt{(a^2 - 2ax)}}$$

$$\frac{ady - yda}{\sqrt{2a}} = \frac{axdx - x^2da}{\sqrt{(a^2x - 2ax^2)}}.$$

in hanc

$$\frac{ady - yda}{a^2\sqrt{2}} = \frac{axdx - x^2da}{a^2\sqrt{(ax - 2x^2)}}.$$

ero per $\frac{1}{4\sqrt{a}}$ multiplicata praebet hanc

$$\frac{da\sqrt{b}}{4a\sqrt{a}} = \frac{axda - a^2dx}{4a^2\sqrt{(ax - 2x^2)}}.$$

Hae duae aequationes additae dant aequationem integrabilem, cu

$$\frac{y}{a\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{b}}{2\sqrt{a}} = \frac{-\sqrt{(ax-2x^2)}}{2a}.$$

Ex qua valor ipsius a erutus fit

$$\sqrt{a} = \frac{y\sqrt{2b} \pm \sqrt{(2y^2x - 2bx^2 + 2x^3)}}{b-x}$$

et

$$\sqrt{(ax-2x^2)} = \frac{yx\sqrt{2} \pm \sqrt{(2by^2x - 2b^2x^2 + 2bx^3)}}{b-x}.$$

Quibus valoribus in aequatione

$$\frac{(xdy - ydx)\sqrt{a} + xdx\sqrt{2b}}{\sqrt{(ax-2x^2)}} = dy\sqrt{b},$$

quae oritur ex duabus differentialibus eliminato da, substitu

$$\frac{xdy - ydx - bdy}{\sqrt{b}} = \frac{dx\sqrt{(y^2 - bx + x^2)}}{\sqrt{x}},$$

aequatio pro curva quaesita CMM.

COROLLARIUM 6

118. Ex hac aequatione invenitur tangens anguli, quem
applicata PM constituit, nempe

$$\frac{dx}{dy} = \frac{-(b-x)\sqrt{x}}{y\sqrt{x} + \sqrt{(by^2 - b^2x + bx^2)}}.$$

Deinde etiam innotescit tangens anguli, quem cyclois AM cu
constituit. Ex aequatione cycloidis erit nimirum

$$\frac{dx}{dy} = \frac{\sqrt{(a^2 - 2ax)}}{\sqrt{2ax}} = \frac{\sqrt{(ax - 2x^2)}}{x\sqrt{2}}.$$

Eliminato vero a erit ista tangens

$$= \frac{y\sqrt{x} + \sqrt{(by^2 - b^2x + bx^2)}}{(b-x)\sqrt{x}}.$$

Quare, cum horum angulorum alter alterius sit complementum sumto ill deinceps posito, erit angulus, quem curva CMM cum qualibet datarum A constituit, rectus. Consequenter curva CMM est traiectoria orthogona omnium cycloidum datarum AM, AM etc.

COROLLARIUM 7

119. Sumto AC alius magnitudinis aliae quoque curvae CMM pro unt et sic infinitae traiectoriae orthogonales inveniuntur, quae omnes in se sunt similes. Data ergo una facile, quotquot libuerit, construere licel

SCHOLION 4

120. Omnes hae curvae arcus abscindentes isochronos, quaecunque fuer urvae secandae, semper construi possunt, etiamsi id ex aequatione n pparcat. Per quadraturas enim ex datis curvis arcus possunt abscindi, dato tempore descensu absolvantur, hocque modo puncta quotlibet curv quaesitae inveniuntur. Si quidem curvae secandae sunt algebraicae, aequa pro curva secante semper ita est comparata, ut factis debitis substitutionil ndeterminatae a se invicem possint separari. At si curvae secandae dif entiali aequatione exprimantur, aequatio differentialis pro curva secan arissime separationem indeterminatarum admittit. Causa est, quod pec iari modo, quo in hoc cycloidum casu usus sum, parameter a elimin debeat eaque substitutio ad separationem non deducat.

SCHOLION 5

121. Deinde observandum est omnes curvas arcus isochronos absc entes, quarum numerus pro vario ipsius b valore est infinitus, inter similes esse, si quidem curvae secandae fuerint tales. Colligitur hoc ex g nerali aequatione

$$\frac{pdx}{\sqrt{x}} = \frac{pda\sqrt{x}}{a} - \frac{da\sqrt{b}}{a},$$

n qua, cum p sit functio ipsarum a et x nullius dimensionis, quantitates et x homogeneitatem constituunt. At ex aequatione curvarum secandaru quia in ea a, x et y ubique eundem dimensionum numerum conficere p nuntur, valor ipsius a erit functio ipsarum x et y unius dimensionis. Qua

eo substituto loco a habebitur aequatio pro curva secante ubique eundem dimensionum numerum constituunt. Cons posito oriuntur infinitae curvae similes inter se respect ergo unica reliquae facile ex similitudinis ratione describ

SCHOLION 6

122. Materia haec de arcubus isochronis abscinder seculo est pertractata in Act. Erud. Lips. A. 1697 a Ce atque postmodum in Comment. Acad. Paris. a Cel. SAU methodo sunt usi. Ego vero eam adhibui methodum, quam i pro A. 1734[3]) tradidi, tanquam commodissimam ad hu solvenda. In his vero locis Viri Cel. curvas quoque sim consideraverunt, sine dubio, quia pro curvis dissimilib difficilis et saepe etiam vires superat. Vocantur vero curvae synchronae, quia arcus simul percursi abscinduntu

SCHOLION 7

123. Ex mea dissertatione Tomi VII Comment. Aca has curvas synchronas simili modo posse inveniri, si cur fuerint similes, sed eiusmodi tamen, ut posito $ds = pdx$ et x datum dimensionum numerum constituant; tum eni literae q invenitur; ut si numerus dimensionum ipsarum n, aequatio pro curva secante reperietur haec

$$\frac{pdx}{\sqrt{x}} = \frac{pda\sqrt{x}}{a} - \frac{(2n+1)da\sqrt{b}}{a}.$$

Quare si fuerit $n = -\frac{1}{2}$, ut si fuerit $p = \frac{\sqrt{ac}}{\sqrt{(a^2-x^2)}}$, erit

$$\frac{dx}{x} = \frac{da}{a}$$

---

1) IOH. BERNOULLI, *Curvatura radii in diaphanis non uniformibus seu radiorum unda construenda*, Acta erud. 1697, p. 206; *Opera omnia*,

2) JOSEPH SAURIN (1653—1716), *Solution générale du problème, courbes semblables, décrites sur un plan vertical, et ayant un même axe il s'agit de déterminer celle dont l'arc compris entre le point d'origine et u est parcouru dans le plus court temps possible*, Mém. de l'acad. d. sc. 1710, p. 208. P. St.

3) Vide notam p. 44. P. St. 4) Editio princeps: *Tomi IX*.

ideoque $x = ma$, seu x in data ratione ad parametrum a est capiendum; quo igitur casu constructio synchronarum est facillima. At si p non huiusmodi habuerit valorem, ex supra citata dissertatione mea intelligitur, quo modo aequationem quaesitam sit inquirendum.

PROPOSITIO 15

PROBLEMA

124. *Si fuerint ut ante infinitae curvae similes AM, AM etc.* (Fig. 18) *et recta positione data DE, invenire eam curvam AMN, super qua corpus tempore brevissimo ex A ad rectam DE descensu pervenit.*

SOLUTIO

Descripta per propositionem praecedentem quacunque curva CMM arcus AM isochronos abscindente ducatur tangens GMH parallela datae rectae DE. Manifestum est super curva AM, quae ad punctum contactus M tendit, corpus tempore brevissimo ad rectam GMH esse venturum, quia quaeque alia puncta rectae GMH extra curvam CMM cadunt ideoque longiore tempore opus est, quo corpus ad ea perveniat. Nam, quoniam omnes curvae a curvis AM, AM arcus isochronos abscindentes sunt inter se similes (§ 121), concipiatur ex iis una, quae rectam DE tangat; dico punctum contactus fore in N puncto, quo recta AM per prius punctum contactus M ducta rectae DE occurrit. Sequitur hoc tum ex natura similitudinis curvarum CMM respectu puncti A, tum etiam ex eo, quod arcus AMN similis sit arcui AM atque rectae DE in eodem angulo occurrat, quo curva AM rectae GH. Quare, cum corpus per AM tempore brevissimo ad GH perveniat, necesse est, ut quoque tempore brevissimo super curva AMN ad rectam DE perveniat. Q. E. I.

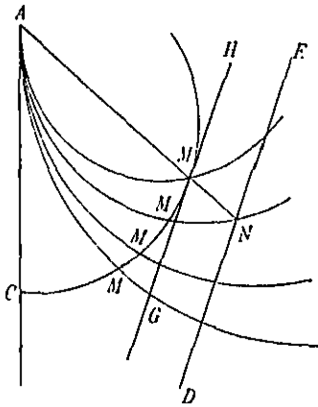


Fig. 18.

COROLLARIUM 1

125. Ex hoc perspicitur, si recta DE fuerit horizontalis, per verticalem AC ad eam citissime pervenire ob tangentem in C horizontalem; id quod quidem per se perspicuum est.

COROLLARIUM 2

126. Si ergo curvae AM, AM fuerint cycloides, ut in e sitionis praecedentis posuimus, corpus super ea cycloide celer DE pervenit, quae huic rectae in N ad angulos rectos occurr quem quaeque cyclois cum curva CM constituit, est rectus.

COROLLARIUM 3

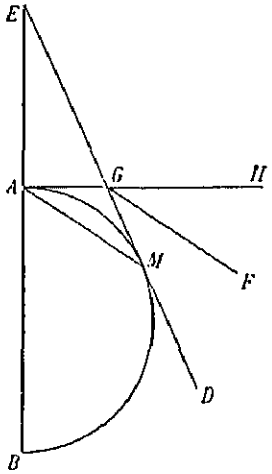


Fig. 19.

127. Si igitur recta DE fueri parallela ipsi AC, portio cycloidis AM cyclois. Quare super dimidia cycloi zontalis est celerrimus.

COROLLARIUM 4

128. Si curvae AM, AM sint r A ad rectam positione datam DE super ea AM (Fig. 19) citissime ad quae est chorda circuli per A transeu in verticali AB habentis atque ro gentis (§ 112).

COROLLARIUM 5

129. Si igitur angulus DEA fuerit n graduum, erit $\frac{90+n}{2}$ graduum et angulus AMG graduum $\frac{90-n}{2}$. Seu d AGH anguloque DGH bisecto recta GF erit quaesita line ipsi GF.

COROLLARIUM 6

130. Quare si linea DE fuerit verticalis, corpus ad eam citissimo p
eniet descendendo super recta ad horizontem angulo semirecto inclina
orpus igitur super recta hoc modo inclinata motu horizontali celerri
rogreditur.

SCHOLION

131. Simili modo quoque inveniri potest, super quanam infinitarum c
arum similium AM, AM (Fig. 18, p. 53) corpus descensu citissime ad data
urvam perveniat. Nam si linea GMH fuerit curva quaecunque tange
urvam CMM in M, corpus super hac curva AM celerrime ad curva
MH perveniet, si quidem tota curva GMH extra curvam CMM fue
ta. Eodem etiam modo posset determinari, si curvae AM, AM non fuer
miles, super quanam corpus celerrime ad datam lineam GH perveniat.
finitis enim curvis CMM arcus isochronos abscindentibus ea est quaeren
uae datam GMH tangat, eritque ea curva AM, quae per punctum co
ctus transit, ea, quae quaeritur. Sed cum in his casibus difficile plerumq
t curvas CMM invenire multoque difficilius eam determinare, quae data
neam tangat, quaestionem ad curvas similes tantum restrinximus.

PROPOSITIO 16

THEOREMA

132. *Tempora descensuum, quibus corpus curvas AM et Am* (Fig. 20, p.
*miles similiterque ex puncto A positas percurrit, sunt in ratione subduplic
terum homologorum.*

DEMONSTRATIO

Quia curvae AM, Am sunt similes, erunt $AM:Am$, $AP:Ap$
$PM:pm$ in data ratione, nempe ea, quam latera homologa tenent;
atio laterum homologorum $N:n$. Quia celeritas in M est ad celeritat
m ut $\sqrt{AP}$ ad $\sqrt{Ap}$, erunt celeritates in M et m in ratione subduplica
terum homologorum. Sumantur iam ex M et m elementa similia, ration
cilicet N ad n tenentia, erunt tempora, quibus haec duo elementa homolo
ercurruntur, in ratione composita ex directa elementorum, i. e. N ad n,

reciproca celeritatum, i. e. $\sqrt{N} : \sqrt{n}$. Ex quo sequitur tempo
varum AM, Am elementa homologa percurruntur, esse in rati

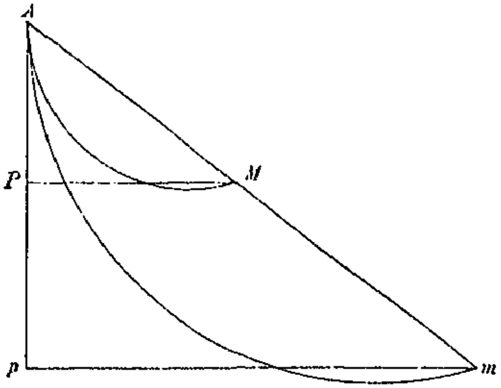


Fig. 20.

laterum homologorum. Quare, cum haec ratio sit constans,
totae curvae AM et Am percurruntur, eandem hanc rationem te

COROLLARIUM 1

133. Tempora igitur, quibus arcus circulares similes sin
descensu percurruntur, sunt in subduplicata ratione radiorum.

COROLLARIUM 2

134. Pendula igitur, quae arcus circulares similes describu
absolvent temporibus, quae rationem subduplicatam longitudin
tenebunt.

COROLLARIUM 3

135. Eadem ratio temporum locum habet, si corpora p
culos describant, sed alias curvas, dummodo eae fuerint inter
lesque arcus absolvantur.

SCHOLION

136. In his autem omnibus potentiam sollicitantem s
uniformem deorsumque tendentem, etiamsi hanc condition
Hanc enim hypothesin ante pertractare constituimus, quam
progressuri.

PROPOSITIO 17

PROBLEMA

37. *Existente potentia sollicitante uniformi tendenteque deorsum moveatur super curva quacunque AM* (Fig. 21) *cum data celeritate initiali in A; inare motum corporis super hac curva et pressionem, quam curva in singulis s sustinet.*

SOLUTIO

osita potentia sollicitante g et celeritate initiali in A debita altitudini tereaque $AP = x$, $PM = y$, $AM = s$ et celeritate in M debita alti-
v, his positis erit $dv = gdx$ (§ 93), unde fit
$+ gx$. Porroque tempus per arcum AM erit
$gx)$. Deinde pressio totalis, quam sustinet
secundum directionem normalis MN, erit (§ 93)

$$= \frac{gdy}{ds} + \frac{2vdxddy}{ds^3} = \frac{gdy}{ds} + \frac{2(b+gx)dxddy}{ds^3}$$

ito dx elemento constante. Hoc enim tantum haec solutio a solutione propositionis 13, ibi esset $v = gx$, hic vero sit $v = b + gx$.

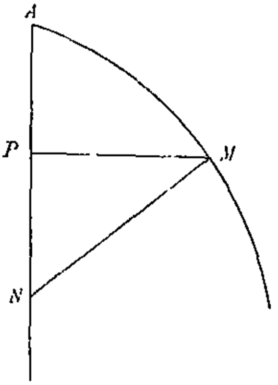


Fig. 21.

s igitur formulis tum motus tum pressio cognoscitur. Q. E. I.

COROLLARIUM 1

38. Si linea AM fuerit recta, iam ex § 88 intelligitur tempus per AM l tempus descensus per AP eadem celeritate $\sqrt{b}$ incepti, ut est AM ?. Pressio vero ob evanescentem vim centrifugam erit $= \frac{gdy}{ds}$ seu constans.

COROLLARIUM 2

39. Patet etiam hoc casu, quo motus non a quiete incipit, celeritatem itudine tantum pendere. Quare, quaecunque fuerit curva AM, celeritas is in quovis eius puncto innotescit, etiam incognita curvae natura.

EXEMPLUM 1

140. Sit curva AM parabola verticem in A et a
habens; erit ergo posita eius parametro $= a$

$$y^2 = ax$$

et

$$dy = \frac{adx}{2\sqrt{ax}} \quad \text{et} \quad ds = \frac{dx\sqrt{(a^2 + 4ax)}}{2\sqrt{ax}}$$

Habebitur ergo tempus per AM

$$= \int \frac{dx\sqrt{(a + 4x)}}{2\sqrt{x(b + gx)}}.$$

Deinde, cum posito dx constante sit $ddy = \frac{-adx^2}{4x\sqrt{ax}}$, eri

$$\frac{dxddy}{ds^3} = \frac{-2a}{(a + 4x)\sqrt{(a^2 + 4ax)}}.$$

Consequenter pressio totalis est

$$= \frac{ga}{\sqrt{(a^2 + 4ax)}} - \frac{4a(b + gx)}{(a + 4x)\sqrt{(a^2 + 4ax)}} = \frac{ga^2 \cdot}{(a + 4x)\sqrt{}}$$

COROLLARIUM 3

141. Si igitur est $b = \frac{ga}{4}$, pressio curvae evanesc
casu libero in hac parabola moveri posset, qui est etia
dente libro [§ 564] pertractatus.

COROLLARIUM 4

142. Existente igitur $b = \frac{1}{4}ga$ erit tempus per arc

$$= \int \frac{dx}{\sqrt{gx}} = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{g}}.$$

Hoc ergo tempus aequatur tempori descensus per abs
incepti.

COROLLARIUM 5

.43. Si $b > \frac{1}{4} ga$, pressio fit negativa; tum igitur curva in plagam axi ppositam premitur. At si $b < \frac{1}{4} ga$, directio pressionis erit in MN. itas vero pressionis in singulis curvae punctis erit reciproce ut radius .

EXEMPLUM 2

.44. Si curva AM fuerit circulus, cuius radius $= a$ et centrum in ali AP sit positum, erit

$$y^2 = 2ax - x^2,$$

$$dy = \frac{adx - xdx}{\sqrt{(2ax - x^2)}} \quad \text{et} \quad ds = \frac{adx}{\sqrt{(2ax - x^2)}}.$$

ergo tempus, quo arcus AM percurritur,

$$= \int \frac{adx}{\sqrt{(2ax - x^2)(b + gx)}}.$$

cum sit

$$\frac{dxddy}{ds^3} = \frac{-1}{a},$$

ressio, quam circulus in puncto M patitur,

$$= g - \frac{gx}{a} - \frac{2(b + gx)}{a} = g - \frac{3gx}{a} - \frac{2b}{a}.$$

COROLLARIUM 6

.45. Tempus per logarithmos exprimi potest, si fuerit $b = 0$; fit autem seu corpus perpetuo in A manebit. Id quod per supra tradita (§ 97) Nam quia curva in A est normalis in AP neque radius osculi o parvus, corpus descendere non potest.

COROLLARIUM 7

.46. Si est $b = \frac{ga}{2}$ seu celeritas initialis tanta, quantam corpus acquirit do ex altitudine dimidii radii circuli, pressio totalis cum vi centrifuga conspirans atque $= \frac{3gx}{a}$; erit itaque altitudini percursae proportionalis.

DEFINITIO 3

147. *Motus oscillatorius est motus reciprocus, quo corpu*
recedit ab initio motus M (Fig. 22). *Ita si corpus super c*
primo descendet super MA, *tum ascendet in* AN, *donec*

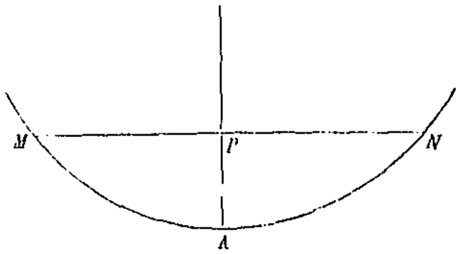


Fig. 22.

deinde ex N *iterum descendet ascendetque in arcu* AM, *quo*
hancque periodum continuabit. Atque talis motus oscillatoriu

COROLLARIUM 1

148. Motus oscillatorius ergo consistit in alternis
sibus super linea curva; atque descensu motu accelera
vero celeritatem acquisitam rursus perdit.

COROLLARIUM 2

149. Quilibet ergo descensus super eadem curvae
praecedens ascensus contigit. Quare, cum celeritas co
tantum pendeat in vacuo, corpus in eodem curvae pu
sive in descensu eandem habet celeritatem.

COROLLARIUM 3

150. Ex quo sequitur tempus descensus per MA a
ascensus per AM similique modo tempus ascensus p
scensus per NA.

COROLLARIUM 4

151. Corpus in arcu AN ascendens ad punctum N usque perveni
od aeque altum est ac punctum M, ex quo erat delapsum. Sequitur h
co, quod celeritas per altitudinem tantum determinetur.

COROLLARIUM 5

152. Si curva AN similis et aequalis fuerit curvae AM, tum mot
r AN aequalis erit motui per AM. Quare omnes ascensus et descens
qualibus fient temporibus.

COROLLARIUM 6

153. Si curvae MA, AN fuerint dissimiles, tempus saltem per MA
quale erit tempori per NAM, seu tempora accessionum et recessionu
int inter se aequalia.

COROLLARIUM 7

154. Quia corpus semper ad eandem altitudinem pertinget, manifesta
hunc motum oscillatorium perpetuo durare debere.

COROLLARIUM 8

155. Curva ergo ad motum oscillatorium producendum apta est om
rva, quae de puncto infimo A duos habet arcus ascendentes, ut MAN.

SCHOLION 1

156. Exposuimus hic proprietates motus oscillatorii, quales ex expos
pothesi potentiae sollicitantis uniformis et perpetuo deorsum tenden
nsequuntur. Eaedem vero quoque locum habent, si potentia utcunque
titudine pendeat vel etiam ad fixum punctum dirigatur; id quod in seque
ous plenius apparebit. In medio resistente vero res aliter se habet; na
que ascensus per datam curvam similis est descensui per eandem, neq
ascensu corpus ad aequalem altitudinem pertingit ei, ex qua descen
at delapsum.

SCHOLION 2

157. Vocari solet motus per MAN itus, sequens vero mot reditus; consistit ergo motus oscillatorius ex alternis itibus Oscillatio vero ab aliis vocatur motus ex itu et reditu constans, itus quam reditus oscillatio vocatur. Hic priori sensu oscilla accipiemus, ita ut una oscillatio ex uno itu unoque reditu c vero atque reditus uterque uno ascensu unoque descensu co ideo integra oscillatio duos ascensus duosque descensus comple igitur tempus itus aequale sit reditus tempori, erit tempus uniu duplo maius quam tempus unius itus seu reditus.

COROLLARIUM 9

158. In hoc ergo capite, in quo de motu in vacuo agitu oscillatorium examinare velimus, vel ascensus vel descensus duabus curvae partibus AM, AN considerare opus habebimus.

SCHOLION 3

159. Nihil refert, utrum arcus AM et AN unam curvam co stituant, an vero sint diversae curvae, dummodo in A ita sin ut communem habeant tangentem; alias enim motus perturba ad motum oscillatorium inquirendum tantum opus est, ut motus AM et AN seorsum definiamus. Sufficit enim hoc tum ad determinandas tum ad relationem inter maiores minoresque inveniendam. Vocantur autem eae oscillationes maiores, qu arcubus absolvuntur, minores vero, quae minoribus.

SCHOLION 4

160. Ex propositione 6 (§ 49) perspicitur, quomodo osci pendulorum effici queant, scilicet ope evolutae curvarum AM et quas filum circumducitur. Ab HUGENIO etiam iste pendulor oscillationes accommodatur, ut vel ex eius instituto, quo eo m logia perficienda utitur, apparet. Eaedem vero difficultates, qu commemoravimus, hic locum habent. Quamobrem motum punct lineis hic tantum investigabimus mentemque ab omnibus pendul stantiis abducemus, quae nostrum institutum turbare possent.

PROPOSITIO 18

PROBLEMA

Existente potentia sollicitante uniformi et deorsum directa determinare census seu descensus per quemvis circuli arcum EA (Fig. 23) *in puncto mo A terminatum.*

SOLUTIO

' circuli centrum, erit CA radius verticalis seu parallelus directioni g. Ponatur $AC = a$ et arcus AE altitudo $AG = b$, erit celeritas puncto A debita altitudini gb, quia corpus ex E descendens tantam eleritatem, cum in A per- Atque tantam celeritatem A habere debet, ut ad E endere possit. Consideretur cus AE elementum Mm et $P = x$; erit

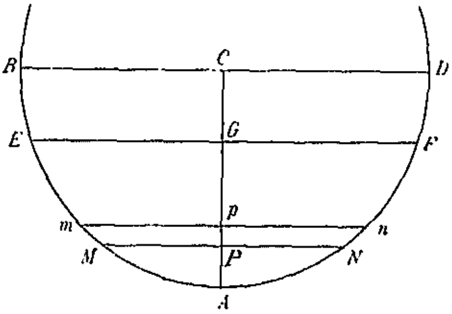


Fig. 23.

$$PM = \sqrt{(2ax - x^2)}$$

$$Mm = \frac{a\,dx}{\sqrt{(2ax - x^2)}}.$$

oro in M erit debita altitudini $g \cdot GP = gb - gx$ (§ 93). Tempus elementum Mm sive ascensu sive descensu percurritur, erit

$$= \frac{a\,dx}{\sqrt{g(b-x)(2ax-x^2)}}.$$

integrari non potest, per series eius integrale exprimemus. Est ito $2a = c$

$$\frac{1}{\ldots x)(2ax - x^2)} = \frac{1}{\sqrt{bc}} \left\{ \begin{array}{l} x^{-\frac{1}{2}} + \dfrac{x^{\frac{1}{2}}(b+c)}{2bc} + \dfrac{x^{\frac{3}{2}}(3b^2 + 2bc + 3c^2)}{8b^2c^2} \\ + \dfrac{x^{\frac{5}{2}}(5b^3 + 3b^2c + 3bc^2 + 5c^3)}{16b^3c^3} + \text{etc.} \end{array} \right\}.$$

per $\frac{a\,dx}{\sqrt{g}}$ multiplicatum et integratum dat tempus, quo arcus AM

absolvitur,

$$= \frac{\sqrt{2ax}}{\sqrt{gb}}\left(1 + \frac{x(b+c)}{6bc} + \frac{x^2(3b^2+2bc+3c^2)}{40b^2c^2} + \frac{x^3(5b^3+3b^2c+3bc^2+5c$$

$$\frac{}{112b^3c^3}$$

Totum vero tempus per arcum EA prodibit, si fiat $x = b$ et ratic ad diametrum $= \pi : 1$, quo posito habebitur[1])

$$\frac{\sqrt{2a}}{\sqrt{g}}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi b}{8c} + \frac{9\pi b^2}{128c^2} + \text{etc.}\right) = \frac{\pi\sqrt{2a}}{2\sqrt{g}}\left(1 + \frac{b}{4c} + \frac{9b^2}{64c^2} + \text{etc}$$

Ubi coefficientes 1, $\frac{1}{4}$, $\frac{9}{64}$ etc. sunt quadrata coefficientium 1, $\frac{1}{2}$, deunt, si $(1-z)^{-\frac{1}{2}}$ in seriem resolvitur. Ex hac igitur serie t proxime potest inveniri. Q. E. I.

COROLLARIUM 1

162. Quo maior igitur arcus EA est, eo maius quoque erit is percurritur. Fit enim posito $b = 2a = c$ tempus infinitum, descensu semicirculum nequaquam describere potest.

COROLLARIUM 2

163. Si igitur corpus oscillatorio motu movetur in arcu ci erit tempus unius itus vel reditus duplo maius quam tempus un vel descensus, quia tempus per ANF aequale est tempori per A unius itus reditusve tempus seu tempus dimidiae oscillationis erit

$$= \frac{\pi\sqrt{2a}}{\sqrt{g}}\left(1 + \frac{b}{4c} + \frac{9b^2}{64c^2} + \text{etc.}\right).$$

Integra vero oscillatio tempore duplo maiore absolvetur.

SCHOLION 1

164. Series haec tempus exprimens statim hoc modo pote Temporis elementum in hos factores resolvatur

$$\frac{adx}{\sqrt{g(bx-xx)}} \times \frac{1}{\sqrt{(2a-x)}}$$

1) Vide scholion 1. P. St.

... posterior tantum in seriem commutetur, scilicet hanc

$$\frac{1}{\sqrt{c}} + \frac{1 \cdot x}{2 \cdot c\sqrt{c}} + \frac{1 \cdot 3 \cdot x^2}{2 \cdot 4 \cdot c^2\sqrt{c}} + \text{etc.}$$

... $= c$. Quia autem post integrationem fit $x = b$, erit

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(bx - x^2)}} = \pi, \quad \int \frac{x\,dx}{\sqrt{(bx - x^2)}} = \frac{1 \cdot \pi b}{2}, \quad \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{(bx - x^2)}} = \frac{1 \cdot 3 \cdot \pi b^2}{2 \cdot 4},$$

$$\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{(bx - x^2)}} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \pi b^3}{2 \cdot 4 \cdot 6} \text{ etc.}$$

...s totum descensus tempus ut ante colligitur

$$= \frac{\pi\sqrt{2a}}{2\sqrt{g}}\left(1 + \frac{1b}{4c} + \frac{9b^2}{64c^2} + \frac{225b^3}{2304c^3} + \text{etc.}\right).$$

SCHOLION 2

Quo appareat, a cuiusnam aequationis constructione summatio seriei

$$1 + \frac{1b}{4c} + \frac{9b^2}{64c^2} + \text{etc.}$$

...pono

$$\frac{b}{c} = \frac{tt}{1 + tt}$$

...m seriei

$$= e^{\int \frac{q\,dt}{t}}$$

... e numerum, cuius log. est $= 1$. His positis ex mea series sum-...thodo in Comment. Acad. Petrop. Tom. VII exposita[1]) invenitur ...equatio

$$dq + \frac{q^2 dt}{t} = \frac{t\,dt}{(1 + tt)^2}.$$

...equatione, si construi posset, inveniretur q in t indeque ipsa summa ... per $\frac{b}{c}$. Quia autem aequatio constructionem non admittit, in se

1) L. Euleri Commentatio 41 (indicis Enestroemiani): *De summis serierum reciprocarum*, ...acad. sc. Petrop. 7 (1734/5), 1740, p. 123; *Leonhardi Euleri Opera omnia*, ...14. P. St.

spectata, apparet eam tamen construi posse, quia summa seriei per tempo in circulo ope quadraturarum assignari potest. Data enim summa seriei ea constructio aequationis inventae sequitur.

COROLLARIUM 3

166. Si arcus AE, in quo descensus vel ascensus absolvitur, ponitur i finite parvus, tempus per eum tamen non fit infinite parvum. Evanesc enim in expressione temporis tantum b eritque tempus descensus vel ascens per arcum AE evanescentem

$$=\frac{\pi\sqrt{2a}}{2\sqrt{g}}.$$

COROLLARIUM 4

167. Iuncta altera circuli parte AF cum AE oscillationes per arcum EA evanescentem fient infinite parvae; tempore tamen absolventur finito. Scilic tempus unius itus vel reditus seu tempus unius dimidiae oscillationis erit

$$=\frac{\pi\sqrt{2a}}{\sqrt{g}}.$$

COROLLARIUM 5

168. Tempora igitur huiusmodi oscillationum infinite parvarum sunt ratione subduplicata composita ex directa radiorum et reciproca potentiar sollicitantium.

COROLLARIUM 6

169. Haec eadem valent, si potentia sollicitans non fuerit uniforn Nam utcunque variabilis ponatur, tamen, dum in corpus super arcu infin parvo motum agit, constantem habebit valorem.

COROLLARIUM 7

170. Intelligitur, etiamsi curva EAF non fuerit circulus, sed curva qu cunque, tum etiam, quae hic allata sunt, ad oscillationes infinite parvas su hac curva pertinere. Tum vero loco radii a radius osculi huius curvae puncto infimo A est accipiendus.

COROLLARIUM 8

1. Huiusmodi oscillationes super arcu infinite parvo EAF efficiuntur nduli, cuius longitudo est radius AC. Tempora igitur oscillationum parvarum pendulorum sunt directe ut radix quadrata ex longitudine et reciproce ut radix quadrata ex potentia sollicitante.

COROLLARIUM 9

2. Si curva ANF non fuerit aequalis curvae AME, pro oscillationibus parvis radium osculi in A tantum considerare sufficit. Sit is $= \alpha$, mpus ascensus per arcum AF infinite parvum $= \frac{\pi\sqrt{2\alpha}}{2\sqrt{g}}$, atque cum descensus per arcum EMA evanescentem sit $\frac{\pi\sqrt{2a}}{2\sqrt{g}}$, erit tempus unius ı dimidiae oscillationis super curva composita EAF

$$= \frac{\pi(\sqrt{a} + \sqrt{\alpha})}{\sqrt{2g}}.$$

COROLLARIUM 10

3. Si oscillationes non fuerint infinite parvae super circulo BAD, a oscillationum maiora erunt, quo maiores sint oscillationum arcus. si oscillationes tamen sint valde parvae, erit tempus talis oscillationis npus oscillationis infinite parvae ut quadruplum diametri circuli sinu ırcus percursi auctum ad quadruplum diametri ipsum.

COROLLARIUM 11

4. Altitudo, ex qua corpus eodem tempore ab eadem potentia g solli- descendit, quo fit descensus per arcum EMA infinite parvum, est sou est ad octavam radii partem ut quadratum peripheriae circuli ad tum diametri; quam proxime ergo haec altitudo erit $= \frac{5}{4}a$.

COROLLARIUM 12

5. Super chorda autem arcus EMA corpus descendit tempore eodem, r diametrum circuli (§ 102). Quare tempus descensus super chorda in-

finite parva est ad tempus descensus super arcu respondente ut ^{2}
$\frac{\pi\sqrt{2a}}{2\sqrt{g}}$, i. e. ut diameter ad quartam peripheriae partem. Atque temp
scensus ex diametro seu dupla penduli longitudine est ad tempus unius i
oscillationis infinite parvae ex itu et reditu compositae ut diameter a
pheriam.

SCHOLION 3

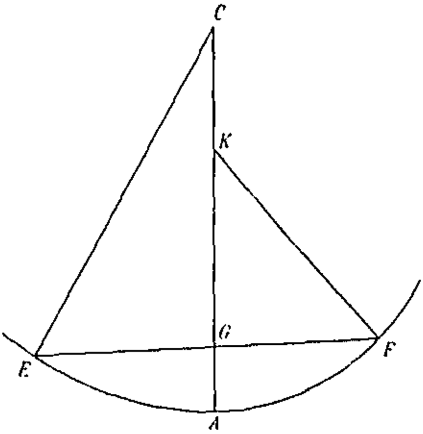


Fig. 24.

176. Si duo arcus circular et FA (Fig. 24), super quib iunctis oscillationes peraguntu sunt aequales, ope penduli ha lationes confici possunt, si in ce arcus AF clavus infigatur, ut CA, postquam arcum EA cir trum C descripsit, in K ro et circa centrum K arcum scribat.

PROPOSITIO 19

PROBLEMA

177. *Data potentia sollicitante invenire longitudinem penduli infinite oscillationes conficientis, quod singulos itus reditusve uno minuto secundo*

SOLUTIO

Existente a longitudine penduli quaesita et g potentia sollicitante, vim gravitatis denotante, est tempus unius dimidiae oscillationis parvae $=\frac{\pi\sqrt{2a}}{\sqrt{g}}$. Haec vero expressio ut in minutis secundis habeatu tudo a in partibus millesimis pedis Rhenani est exprimenda et $\frac{\pi\sqrt{2a}}{\sqrt{g}}$ per 250 dividenda, ut ex primo libro [§ 221] apparet. Qua

bebitur tempus unius dimidiae oscillationis

$$= \frac{\pi\sqrt{2a}}{250\sqrt{g}} \text{ min. sec.}$$

iare, cum hoc tempus unum minutum secundum esse debeat, erit

$$\pi\sqrt{2a} = 250\sqrt{g}$$

que

$$a = \frac{31250g}{\pi^2} = 3166\frac{1}{4}\ g \text{ part. mill. pedis Rhen.}$$

iec ergo est longitudo penduli semioscillationes uno minuto secundo abs- ntis. Q. E. I.

COROLLARIUM 1

178. Longitudines ergo pendulorum eodem tempore oscillationes pe- ntium, sed a diversis potentiis sollicitatorum, sunt in ipsarum potentiaru- tione.

COROLLARIUM 2

179. Si potentia sollicitans g aequalis est vi gravitatis 1, qui casus cillationes in superficie terrae factas competit, erit penduli longitudo, qu- us reditusque singulos uno minuto secundo absolvit,

$$= 3{,}16625 \text{ pedum Rhen.}$$

u trium pedum cum sexta pedis parte.

SCHOLION 1

180. Apprime convenit haec longitudo cum ea, quam HUGENIUS per erimenta invenit; ex quo apparet nos in praecedente libro [§ 220] numer- 5625 scrup. pedis Rhenani recte pro altitudine, ex qua corpus vi gravita- ollicitatum tempore unius minuti secundi delabitur, assumsisse; ex hoc en- umero fluit numerus 250, per quem temporum expressiones dividi debe- t minuta secunda praebeant. Cum igitur HUGENIUS longitudinis 3,166 p- ertiam partem pro pede universali haberi velit, quippe cuius longitudo ubic- errarum per observationes potest determinari, continebit hic pes universa- 055 partes millesimas pedis Rhenani.

SCHOLION 2

181. Observationibus vero hic pes universalis sequenti modo commodis
sime determinatur. Sumatur pendulum longitudinis f, quod ad minimas oscil
lationes faciendas impellatur, numerenturque eius dimidiae oscillationes tem
pore unius horae earumque numerus sit n, ita ut una semioscillatio absol
vatur tempore $\frac{3600}{n}$ min. sec. Sit iam longitudo penduli semioscillatione
minutis secundis absolventis z. Quare, cum tempora oscillationum diversoru
pendulorum ab eadem potentia sollicitatorum sint in subduplicata ration
pendulorum (§ 171), erit

$$\frac{3600}{n} : 1 = \sqrt{f} : \sqrt{z}$$

ideoque

$$z = \frac{n^2 f}{12\,960\,000}$$

et consequenter pes universalis

$$= \frac{n^2 f}{38\,880\,000}.$$

COROLLARIUM 3

182. Pendulum igitur quadruplo longius quam $3166\frac{1}{4}$ scrup. pedis Rhe
nani semioscillationes duobus minutis secundis absolvet, quia tempora osci
llationum sunt in subduplicata ratione longitudinum pendulorum.

COROLLARIUM 4

183. Cum semidiameter telluris sit 20382230 ped. Rhen., si tantae long
tudinis pendulum concipiatur, durabit eius una semioscillatio 2536 min. se
Quare in horis 24 prope 17 oscillationes integras absolvet.

COROLLARIUM 5

185.[1]) Quia tempus dimidiae oscillationis est $\frac{\pi\sqrt{2a}}{\sqrt{g}}$, erit tempus integra
oscillationis $\frac{2\pi\sqrt{2a}}{\sqrt{g}}$. At huic tempori aequale est tempus revolutionis in per
pheria circuli radii a a corpore motu libero peractae, quod ad centrum circu

1) Editio princeps falso omittit numerum 184. P. St.

vi $= g$, ut ex praecedente libro [§ 612] apparet. Hanc ob rem tempus
oscillationis integrae penduli semidiametro terrae aequalis aequatur
i, quo corpus proiectum in superficie terrae unam revolutionem pera-
Ostendit vero quoque HUGENIUS corpus hoc modo motum tempore 24
n fere 17 revolutiones esse absoluturum.

COROLLARIUM 6

6. Cum vis gravitatis sit ad vim, qua corpus in superficie solis ad
n solis urgetur, ut 41 ad 1000[1]), erit longitudo penduli, quod in super-
olis semioscillationes minuto secundo absolvit, = 77,226 ped. Rhenan.
modo ob gravitatem in superficie Iovis $= \frac{107}{82}$ tale pendulum longum
48 ped. Atque in superficie Saturni ob gravitatem $= \frac{105}{82}$ talis penduli
do erit 4,054 ped.

PROPOSITIO 20

PROBLEMA

7. *Si fuerit curva BAD (Fig. 25), super qua fiunt oscillationes, cyclois diametri AC super basi horizontali BD descripta, determinare tempus onis per quemque arcum EAF existente potentia sollicitante uniformi et tendente.*

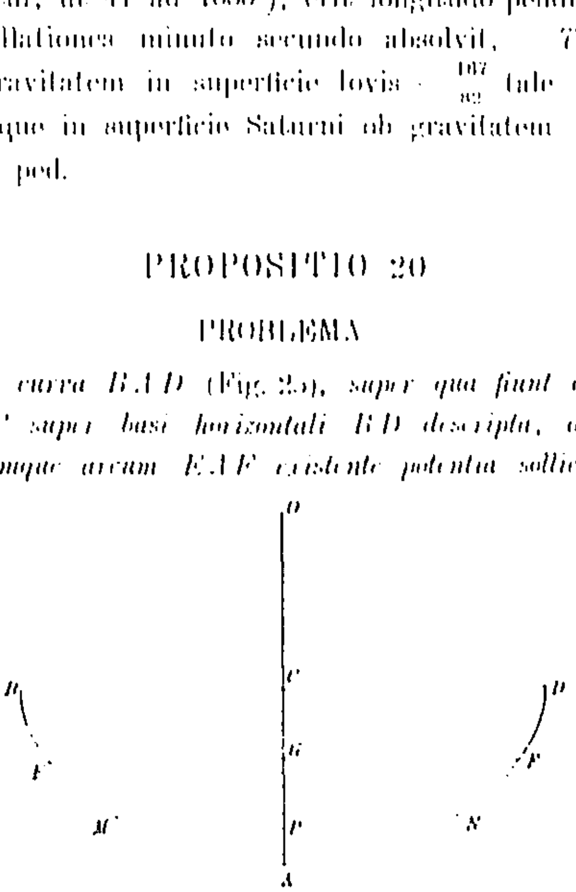


Fig. 25

SOLUTIO

t radius osculi in A, nempe AO, $= a$, qui est duplum diametri circuli
toris AC; erit ergo $AC = \frac{1}{2}a$ et posita abscissa $AP = x$ et arcu re-

1) Editio princeps: *ut* 1000 *ad* 41. Correxit P. St.

spondente $AM = s$ erit ex natura cycloidis

$$s^2 = 2ax.$$

Sit iam abscissa arcui EAF, qui motu oscillatorio percurri
$AG = b$; erit celeritas in puncto infimo A debita altitudini gb
M debita altitudini $g(b - x)$. Quare, cum sit

$$ds = \frac{adx}{\sqrt{2ax}},$$

erit tempus, quo arcus AM percurritur,

$$= \int \frac{dx\sqrt{2a}}{2\sqrt{g(bx - x^2)}} = \frac{\sqrt{2a}}{2\sqrt{g}} \int \frac{dx}{\sqrt{(bx - xx)}}.$$

Est vero, si post integrationem ponatur $x = b$, quo tempus p
AE prodeat,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(bx - x^2)}} = \pi$$

seu peripheria circuli per diametrum divisa. Quare tempus
vel descensus est

$$= \frac{\pi\sqrt{2a}}{2\sqrt{g}}$$

et tempus unius itus vel reditus per arcum EAF erit

$$= \frac{\pi\sqrt{2a}}{\sqrt{g}}.$$

Atque tempus unius integrae oscillationis erit

$$= \frac{2\pi\sqrt{2a}}{\sqrt{g}}.$$

Q. E. I.

COROLLARIUM 1

188. Quia in hanc temporis expressionem littera b, qu
arcus EAF determinat, non ingreditur, omnium oscillationum
super eadem cycloide perficiuntur, sunt inter se aequalia.

COROLLARIUM 2

189. Tempus ergo uniuscuiusque oscillationis erit aequale tempori os tionis per arculum infinito parvum. At arculus infinite parvus cong m arculo circuli radio OA descripti. Quare tempus cuiusque oscillatio per cycloide BAD aequale erit tempori, quo pendulum longitudinis a os tionem minimam absolvit. Id quod etiam ex praecedente propositi ucet; tempus enim minimae oscillationis penduli a est $=\frac{2\pi\sqrt{2a}}{\sqrt{g}}$ (§ 167), dem formula tempus unius oscillationis integrae super cycloide express venimus.

COROLLARIUM 3

190. Si igitur pendulum ita adaptetur, ut corpus oscillans in cyclo oveatur, omnes eius oscillationes, sive fuerint magnae sive parvae, aeq ous absolventur temporibus. Quare si AO fuerit $= 3166\frac{1}{4}\,g$ scrup. pe henani, singulae semioscillationes minuto secundo absolventur.

COROLLARIUM 4

191. Omnes igitur descensus super cycloide ad punctum infimum A s equitemporanei seu isochroni, item omnes ascensus ex puncto infimo onec celeritas fuerit absumta. Tempus vero unius ascensus vel descen t $\frac{\pi\sqrt{2a}}{2\sqrt{g}}$.

SCHOLION 1

192. Propter hanc proprietatem cyclois tautochronae nomine appel let, quia omnes oscillationes super ea eodem tempore absolvuntur. HUGEN imus hanc eximiam cycloidis proprietatem detexit statimque cogitavit cloide in locum circuli substituenda in oscillationibus, id quod in horolo fecit. Nunc tamen horologiorum artifices hunc oscillandi modum ru eseruerunt, quod eius usum nimis exiguum compererint. Atque certe acuo quaelibet curva oscillationes isochronas producit, quia perpetuo eiusd agnitudinis existunt. In medio resistente vero, quo oscillationes decresc cclois hanc proprietatem amittit ideoque nullius est utilitatis.

SCHOLION 2

193. Intelligitur etiam, si duae cycloides AE et AF
dissimiles in punctis infimis iungantur, oscillationes super c
EAF aequalibus temporibus absolvi. Nam cum super ut
ascensus vel descensus sint constantis quantitatis, etiam s
nempe tempora semioscillationum et integrarum oscillatio
erunt aequalia. Sit duplum diametri circuli generantis cyclo
erit tempus unius ascensus vel descensus super $AF = \frac{\pi\sqrt{2}}{2\sqrt{g}}$
reditusve super curva composita EAF absolvetur tempore
integra vero oscillatio tempore $= \frac{2\pi(\sqrt{2a}+\sqrt{2\alpha})}{\sqrt{g}}$.

SCHOLION 3

194. Ordo requireret, ut, antequam ad alias potentiae s
rectiones progrediamur, effectus potentiae, cuius directiones sint a
sed variabiles, evolveremus motumque corporis a huiusmodi pot
super data curva investigaremus. Sed cum exempla motum
continentia nobis adhuc lateant atque principia, quorum op
quaque curva cognoscitur, iam sint exposita, pleniorem tracta
feremus, ubi curvas sumus investigaturi, super quibus corpus
potentiis sollicitatum data lege incedat.

PROPOSITIO 21

PROBLEMA

195. *Si corpus perpetuo vi quacunque ad centrum fixum C*
trahatur atque super data curva AM moveatur, determinare motum
hac linea et pressionem, quam curva in singulis punctis sustinet.

SOLUTIO

Sit corporis celeritas initialis in A debita altitudini b e
centro C distantia $AC = a$. Celeritas vero corporis in quo

loco M debita sit altitudini v et vis, qua corpus in M versus C sollicit
sit $= P$ existente vi gravitatis corporis moti $= 1$. Dicatur distantia
y et arcus AM s; erit elementum $Mm = ds$ et $Mn = -dy$. Centro C describantur arcus circulares MP, mp; erit $AP = a - y$, $Pp = Mn = -dy$. Iam ducta tangente MT in eamque perpendiculo CT erit

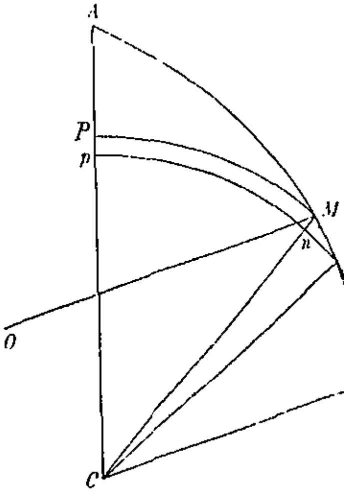


Fig. 26.

$$MC : MT = Mm : Mn$$

et

$$MC : CT = Mm : mn,$$

unde erit

$$MT = \frac{-ydy}{ds} \quad \text{et} \quad CT = \frac{y\sqrt{(ds^2 - dy^2)}}{ds}.$$

Ex quibus, si vis centripeta in tangentialem secundum MT et normalem secundum MO resolvatur, erit vis tangentialis $= -\frac{Pdy}{ds}$ et normalis $= \frac{P\sqrt{(ds^2 -}}{ds}$
Ex vi tangentiali ergo habebitur $dv = -Pdy$. Ponatur intervallum AI
quo corpus propius ad centrum accessit; erit $a - y = x$ et $dx = -dy$.
erit $dv = Pdx$, et si P a distantia MC pendeat, poterit $\int Pdx$ exhiberi
igitur integrali $\int Pdx$ accepto, ut evanescat posito $x = 0$, erit

$$v = b + \int Pdx.$$

Ex quo tempus per arcum AM erit

$$= \int \frac{ds}{\sqrt{(b + \int Pdx)}}.$$

Vis normalis $\frac{P\sqrt{(ds^2 - dy^2)}}{ds}$ tota in pressione curvae secundum MO insur
Quo igitur haec commodius exponatur et cum vi centrifuga simul exhib
pono perpendiculum $CT = p$; erit vis normalis $= \frac{Pp}{y}$. Deinde radius
MO erit $= \frac{ydy}{dp}$, ex quo habetur vis centrifuga

$$= \frac{2vdp}{ydy} = \frac{2dp(b + \int Pdx)}{ydy},$$

cuius effectus effectui vis normalis est contrarius. Quamobrem
versus MO premetur vi

$$= \frac{Ppdy - 2bdp - 2dp\int Pdx}{ydy}.$$

Q. E. I.

COROLLARIUM 1

196. Si igitur vis P a distantia y tantum pendeat, ita
aequalibus a centro distantiis aequaliter urgeatur, celerit
distantia quoque tantum pendebit atque corpus super curva
aequalibus a centro distantiis aequales habebit celeritates.

COROLLARIUM 2

197. Atque in quovis puncto M celeritas tanta erit,
corpus acquireret, si eadem celeritate initiali Vb ex A per i
descenderet, existente nimirum $CP = CM$.

COROLLARIUM 3

198. Etiamsi igitur ipsa curva AM sit incognita, tamen
ea moti in quaque a centro C distantia celeritas potest assigna
pro distantia y

$$v = b + \int Pdx$$

existente $x = a - y$.

COROLLARIUM 4

199. Si curva AM fuerit talis, ut pressio, quam corpus i
sit nulla, erit curva ea ipsa, quam corpus motum in A ce
choans libere describeret. Erit itaque pro motu libero

$$Ppdy = 2bdp + 2dp\int Pdx,$$

seu ob $dx = -dy$ habebitur

$$Ppdy + 2dp\int Pdy = 2bdp.$$

Cuius integralis est

$$p^2\int Pdy = bp^2 - bh^2$$

nte h perpendiculo ex C in tangentem in A demisso. Ex his aequa-
us invenitur

$$P = \frac{2bh^2dp}{p^3dy},$$

raecedente libro [§ 587] pro motu libero invenimus.

COROLLARIUM 5

00. In motu igitur super quacunque curva AM pressio, quam curva
secundum MO sustinet, est

$$= \frac{-\operatorname{diff.} p^2(b+\int Pdx)}{pydy} = \frac{\operatorname{diff.} p^2(b+\int Pdx)}{pdx(a-x)} = \frac{\operatorname{diff.} p^2 v}{pdx(a-x)}.$$

EXEMPLUM 1

01. Sit curva AM circulus centrum in C habens, erit motus corporis
nis propter eandem eius perpetuo a centro virium C distantiam. Quare
$= b$ et $\int Pdx = 0$ atque tempus per AM

$$= \frac{s}{\sqrt{b}} = \frac{AM}{\sqrt{b}}.$$

e cum sit $y = a$, erit et $p = a$ et $dp = dy$. Quamobrem pressio, quam
secundum MO seu versus centrum C sustinet, prodibit $= P - \frac{2b}{a}$.
uo perspicitur, si fuerit $b = \frac{Pa}{2}$, corpus libere per hunc circulum
n iri.

EXEMPLUM 2

02. Sit vis centripeta P potestati cuicunque distantiarum y proportio-
seu $P = \frac{y^n}{f^n}$ et curva AM spiralis logarithmica circa centrum C, ita

$$p = my$$

$$dp = mdy \quad \text{atque} \quad ds = \frac{dy}{\sqrt{(1-m^2)}}.$$

rgo

$$v = b + \int \frac{y^n dx}{f^n} = \frac{a^{n+1} - y^{n+1} + (n+1)bf^n}{(n+1)f^n}$$

atque tempus per arcum AM

$$= \frac{\sqrt{(n+1)f^n}}{\sqrt{(1-m^2)}} \int \frac{dy}{\sqrt{(a^{n+1} - y^{n+1} + (n+1)bf^n)}}.$$

Pressio vero, quam curva secundum MO sustinet, erit

$$= \frac{m(n+3)y^n}{(n+1)f^n} - \frac{2mb}{y} - \frac{2ma^{n+1}}{(n+1)f^n y}.$$

COROLLARIUM 6

203. Corpus igitur, cum in centrum C pervenerit, celeritatem finitam, si $n+1$ est numerus affirmativus; altitudo enim isti celer bita est

$$\frac{a^{n+1}}{(n+1)f^n} + b.$$

At si $n+1$ est numerus negativus vel etiam $= 0$, celeritas corp erit infinite magna.

COROLLARIUM 7

204. In ipso vero centro corpus vi infinita premetur directione tendente, seu vis centrifuga praevalebit, si fuerit $n > -3$. At si n vis normalis praevalebit atque curva vi infinita versus centrum pre

PROPOSITIO 22

PROBLEMA

205. *Si corpus perpetuo vi centripeta ad centrum virium C* (Fig. *trahatur dataque sit curva EAF ad oscillandum idonea, determin oscillatorium corporis super hac curva.*

SOLUTIO

Sit vis centripeta functioni cuicunque distantiarum a centro tionalis, erit celeritas corporis in aequalibus a centro C distantiis,

N, eadem. In E vero et F celeritas corporis sit nulla; maxima verc in puncto curvae A centro C proximo; ducaturque recta CAO. Corpus per arcum EAF oscillationes absolvet, ad quas definiendas motum corporis super utraque curva AE et AF investigare sufficit. Sit celeritas corporis maxima, quam habet in A, debita altitudini b et celeritas in quocunque puncto M debita altitudini v. Ponatur distantia CM, cui aequalis sit CP, $= y$ et vis centripeta in $M = P$. Sit $CA = a$ et $AP = x$ atque $AG = k$ sumta $CG = CE$; erit $y = a + x$ et $CG = CE = a + k$. Posito arcu $AM = s$ erit tangens MT, quam perpendiculum ex C in eam demissum determinat, $= \frac{ydy}{ds}$ ideoque vis tangentialis $= \frac{Pdy}{ds}$, quae motui corporis crescente y est contraria; unde habebitur

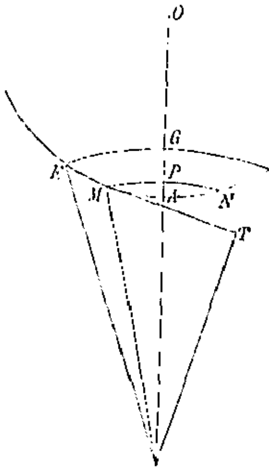


Fig. 27.

$$dv = -Pdy = -Pdx \quad \text{et} \quad v = b - \int Pdx$$

integrali $\int Pdx$ ita accepto, ut evanescat posito $x = 0$. Si igitur po $v = 0$, dabit ex aequatione $b = \int Pdx$ valor ipsius x erutus interv AG seu k. Tempus ergo, quo arcus AM percurritur, est

$$= \int \frac{ds}{\sqrt{(b - \int Pdx)}},$$

ex quo tempus per totum arcum AE prodibit, si post integratione institutam, ut integrale evanescat posito [$x = 0$, ponatur] $x = k$ seu $\int Pd$ Simili modo tempus per arcum AF invenietur, quo igitur invento s horum temporum dabit tempus unius semioscillationis. Q. E. I.

COROLLARIUM 1

206. Si curva AF similis et aequalis fuerit curvae AE, tempor utramque erunt aequalia atque ideo tempus unius semioscillationis aequ duplo tempori per AE.

EXEMPLUM 1

207. Si arcus EAF fuerit infinite parvus, potentia sollicitans P stantiam a centro C invariabilem erit constans $= g$. Sit radius osculi

in A seu $AO = h$; erit AE arcus circuli hoc radio descri
circuli erit

$$CT = \frac{a^2 + 2ah - y^2}{2h}$$

et

$$MT = \frac{\sqrt{(4h^2y^2 - a^4 - 4a^3h - 4a^2h^2 + 2a^2y^2 + 4ah}}{2h}$$

Sed ob $y = a + x$ et x respectu a et h infinite parvum e

$$MT = \frac{\sqrt{2ahx(a+h)}}{h}$$

et

$$ds = \frac{hydy}{\sqrt{2ahx(a+h)}} = \frac{h(a+x)dx}{\sqrt{2ahx(a+h)}} = \frac{dx\sqrt{}}{\sqrt{2(a+}}$$

At cum sit $v = b - gx$ ideoque $b = gk$, habebimus $v =$
mentum temporis

$$= \frac{dx\sqrt{ah}}{\sqrt{2g(a+h)(kx - x^2)}}.$$

At

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(kx - x^2)}}$$

posito $x = k$ fit $= \pi$, peripheriae circuli existente diamet
tempus per arcum AE infinite parvum est

$$= \frac{\pi\sqrt{ah}}{\sqrt{2g(a+h)}} = \frac{\pi\sqrt{2ah}}{2\sqrt{g(a+h)}}.$$

COROLLARIUM 2

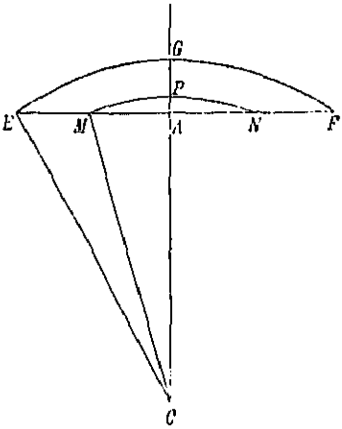


Fig. 28.

208. Si centrum virium
esset $a = \infty$, erit potentiae d
ideoque ut supra erit tempu
absovitur

$$= \frac{\pi\sqrt{2h}}{2\sqrt{g}}.$$

At si arcus circuli EA fit
seu $h = \infty$, erit tempus per

$$= \frac{\pi\sqrt{2a}}{2\sqrt{g}}.$$

COROLLARIUM 3

Si ergo hic casus comparetur cum oscillationibus penduli a po-
aoque, sed directiones sibi parallelas habente, sollicitati, erit penduli
longitudo $= \frac{ah}{a+h}$. Tempus enim unius descensus seu ascensus
luli est (§ 166)

$$= \frac{\pi\sqrt{2ah}}{2\sqrt{g(a+h)}}.$$

EXEMPLUM 2

Sit iam (Fig. 28, p. 80) vis centripeta potestati cuicunque distantiarum
alis seu $P = \frac{y^n}{f^n}$ et linea EF recta. Erit

$$AM = s = \sqrt{(y^2 - a^2)} \quad \text{et} \quad x = y - a.$$

porro

$$v = b - \int \frac{y^n dy}{f^n} = b + \frac{a^{n+1} - y^{n+1}}{(n+1)f^n}$$

$v = 0$ fiet

$$y^{n+1} = a^{n+1} + (n+1)bf^n = (a+k)^{n+1}.$$

$CE = c$ erit

$$b = \frac{c^{n+1} - a^{n+1}}{(n+1)f^n} \quad \text{et} \quad v = \frac{c^{n+1} - y^{n+1}}{(n+1)f^n}.$$

ter ob $ds = \frac{y\,dy}{\sqrt{(y^2 - a^2)}}$ habebitur tempus per AM

$$= \int \frac{y\,dy\sqrt{(n+1)f^n}}{\sqrt{(y^2 - a^2)(c^{n+1} - y^{n+1})}}.$$

grale ita est accipiendum, ut fiat $= 0$ posito $y = a$. Tumque facto
ebitur tempus per lineam EA. Semioscillatio vero seu motus per
uabitur duplo huius temporis.

COROLLARIUM 4

211. Ponatur vis centripeta distantiis proportionalis seu
tempus per AM

$$= \int \frac{y\,dy\sqrt{2f}}{\sqrt{(y^2-a^2)(c^2-y^2)}}$$

seu posito $AE = i$ ob $c^2 = a^2 + i^2$ et $y^2 = a^2 + s^2$ erit tempus

$$= \int \frac{ds\sqrt{2f}}{\sqrt{(i^2-s^2)}},$$

unde tempus per AE erit $= \frac{\pi\sqrt{2f}}{2}$. Omnes igitur oscillation
recta absolvuntur eodem tempore; dimidia nimirum oscill
$\pi\sqrt{2f}$ conficietur.

COROLLARIUM 5

212. Si *oscillatio est infinite parva*, tempus unius semiosci
recta erit quoque $\pi\sqrt{2f}$; at cum vis centripeta tam ut consta
possit, sit ea $= g$; erit $\frac{a}{f} = g$ ideoque tempus unius semioscilla
ut supra § 208.

COROLLARIUM 6

213. Quia directiones gravitatis revera convergunt ad ce
corpus in superficie telluris super recta perfecte horizontal
peragere posset, nisi resistentia et frictiones impedirent. T
unius semioscillationis talis foret (ob a = semidiametro terrae
minut. secund. (§ 183).

PROPOSITIO 23

PROBLEMA

214. *Si corpus sollicitetur a duabus quibuscunque potentiis, q
directio sit verticalis MQ* (Fig. 29, p. 83), *alterius horizontalis
motum corporis ab istis viribus sollicitati super data curva AMB.*

SOLUTIO

Sit celeritas in B nulla, in M debita altitudini v. Vis sol
dum MQ sit $= P$ et ea secundum $MP = Q$. Ponatur BR

$BM = w$, quas litteras ad descensum corporis ex quiete ex B adhi-
mus. At pro ascensu ex A quacunque cum celeritate initiali, qui motus
scillationes referetur, sit $AP = x = QM$,
$= AQ = y$ et arcus $AM = s$; celeritas
corporis in A debita sit altitudini b; erit
$t + x =$ const., item $z + y =$ const. et
$=$ const., unde $dt + dx = 0$, $dz + dy = 0$
$w + ds = 0$. Resolutis potentiis P et Q
ormales et tangentiales erit vis tangentialis
orta $= \frac{Pdt}{dw}$ et vis normalis ex P orta
z trahens secundum MN. Deinde erit vis
ntialis ex Q orta $= \frac{Qdz}{dw}$ et normalis ex Q
lt, quae illi normali est contraria. Utraque vis tangentialis motum per
accelerat ideoque erit

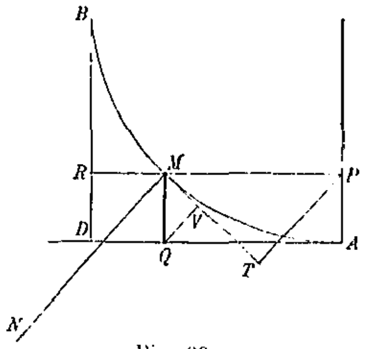


Fig. 29.

$$dv = Pdt + Qdz \quad \text{et} \quad v = \int Pdt + \int Qdz$$

ntegralibus ita acceptis, ut evanescant factis t et $z = 0$. Atque pro
nsu ex A erit

$$v = b - \int Pdx - \int Qdy$$

ntegralibus ita sumtis, ut evanescant positis x et $y = 0$. Positis igitur
la aequatione $v = \int Pdt + \int Qdz$, $t = BD$ et $z = AD$ fiet $v = b$. Quare
us per BM erit

$$= \int \frac{dw}{\sqrt{(\int Pdt + \int Qdz)}}$$

empus per AM

$$= \int \frac{ds}{\sqrt{(b - \int Pdx - \int Qdy)}}.$$

o elemento dt vel dx constante erit radius osculi curvae in $M = \frac{dw^3}{dtddz}$
o vis centrifuga, cuius directio secundum MN est,

$$= \frac{2dtddz(\int Pdt + \int Qdz)}{dw^3}.$$

lis ergo vis, qua curva in M secundum MN premitur, est

$$= \frac{Pdz - Qdt}{dw} + \frac{2dtddz(\int Pdt + \int Qdz)}{dw^3}.$$

COROLLARIUM 1

215. Si P est functio ipsius x vel t quaecunque et Q f
vel z quaecunque, tam Pdx quam Qdy integrari poterunt; at
ritas v poterit exhiberi et ope aequationis pro curva tempus

COROLLARIUM 2

216. Quia quaecunque et quotcunque potentiae sollicita
earum directiones sint in eo plano, in quo est curva AMB, in
potentias possunt resolvi, haec propositio latissime patet e
complectitur, quibus potentiarum directiones et curva sunt i

SCHOLION

217. Patet etiam haec propositio latius, si pauca adiician
hendit casus, quibus non omnes potentiarum directiones
curvae. Tum enim hae potentiae in binas sunt resolvendae,
sint in ipso curvae plano, alterae ad hoc planum normales.
plano curvae sitae eodem modo, quo in propositione usi su
dabunt accelerationem corporis et pressionem secundum M
tentiae, quia normales sunt in curvam, in curva premenda tant
Quare hinc duplex nascetur pressio, quam curva sustinet, a
MN directa, altera ad planum curvae normalis. Harum igitur
num si media sumatur directio, prodibit directio potentiae a
qua curva premitur. Quamobrem non est opus, ut huiusm
vamus, sed paucis attingemus motum corporum super curva,
est in plano sita, ubi potentiam sollicitantem constantem
dentem ponemus.

PROPOSITIO 24

PROBLEMA

218. *Existente potentia sollicitante uniformi eiusque directio*
tendente determinare motum corporis super curva quacunque AM
non in eodem plano constituta.

SOLUTIO

Sit curva AQ proiectio curvae AM in plano horizontali
punctis quibusque proximis M et m in hoc planum perpendi

ur ad axem pro lubitu assumtum AP normales QP et qp ponaturque
x, $PQ = y$ et $QM = z$. Sit corporis celeritas in A debita altitudini b,
s in M debita altitudini v. Potentia
t $= g$, qua corpus in M secundum
ollicitatur. Ducta tangente MT et
ex Q perpendiculari QT resolvatur
a g in tangentialem et normalem.

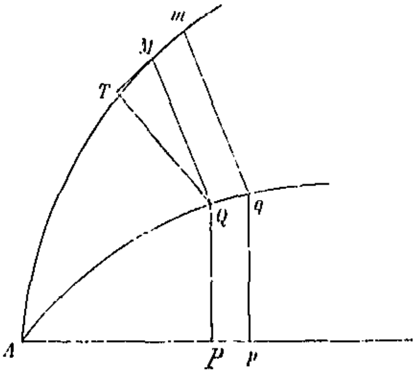


Fig. 30.

$$Q : MT = \sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)} : dz$$

gentialis

$$= \frac{g\,dz}{\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}}.$$

ob

$$MQ : QT = \sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)} : \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$$

nalis

$$= \frac{g\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}}.$$

tem vis tangentialis motum retardat, erit

$$dv = -g\,dz \quad \text{et} \quad v = b - gz,$$

npus, quo arcus AM absolvetur, prodit

$$= \int \frac{\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}}{\sqrt{(b - gz)}}.$$

nalis vero efficiet, ut curva in M a corpore tanta vi prematur iuxta
em ad Mm normalem et in plano $QMmq$ sitam. Premitur vero
raeterea a vi centrifuga secundum directionem positioni radii osculi
m vi

$$= \frac{2(b - gz)}{r}$$

te r radium osculi curvae in M. Invenimus autem supra (§ 71) po-
radii osculi, ex qua proinde directio vis centrifugae innotescit.
s vero vis centrifugae dabitur ex radio osculi, qui § 72 est inventus;
oc

$$r = \frac{(dx^2 + dy^2 + dz^2)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{(dx^2(ddy^2 + ddz^2) + (dy\,ddz - dz\,ddy)^2)}}.$$

COROLLARIUM 1

219. Celeritas igitur corporis hoc quoque casu ab alt
pendet. Atque celeritas in M tanta est, quantam corpus per
cum celeritate in Q altitudini b debita in M haberet.

COROLLARIUM 2

220. Non poterit ergo corpus ad maiorem altitudinem a
ad $\frac{b}{g}$. Nam si est $b - gz = 0$, corpus in ea altitudine omn
amisit iterumque descendet.

COROLLARIUM 3

221. Intelligitur etiam, si potentia non constans fuiss
variabilis P, tum inventam fuisse celeritatem in M debitam

$$b - \int P dz.$$

SCHOLION 1

222. Si in plano verticali concipiatur curva AM (Fig. 31
zontalem AQ relata fueritque $AQ =$ curvae AQ praeced. fig

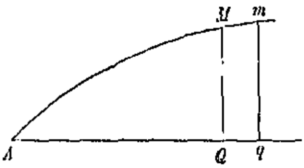


Fig. 31.

praeced. fig., erit quoque curva A
vae AM praeced. fig. Si iam cor
AM ascendat celeritate initiali in
tudini b et ab eadem potentia g so
bit in M quoque celeritatem altitu
tam. Atque ideo tempus quoque a
congruet cum tempore ascensus per AM in praeced. fig.
tione motus corporis super curva non in eodem plano sita
motum super curva in eodem plano posita. Inter motus en
erit discrimen; at pressiones, quas hae duae curvae
diversae. Quamobrem hoc modo pressio, ut libet, poterit
motu corporis super curva eodem.

SCHOLION 2

223. Posuimus hactenus curvam, super qua corpus move
sollicitantem una cum directione datas ex iisque motum

a curvae deduximus. Nunc igitur, cum haec sufficere possint, ad alias tiones progrediemur, in quibus alia pro datis accipiuntur reliquaque sunt enda. Et primo quidem data sit pressio in singulis curvae punctis et ia sollicitans; ex quibus ipsa curva et motus super ea debeat inveniri. o aliis factis combinationibus inter eas res, quae in computum veniunt, quaestiones formabimus.

PROPOSITIO 25

PROBLEMA

224. *Si corpus a quacunque vi perpetuo deorsum trahatur, invenire curvam* (Fig. 32), *quam corpus super ea descendens ubique aequaliter premit.*

SOLUTIO

Sit AM curva quaesita; dicatur super axe verticali abscissa $AP = x$, ata $PM = y$ et curva $AM = s$. Sit porro vis corpus in M sollicitans et altitudo debita celeritati in $A = b$; erit altidebita celeritati in $M = b + \int Pdx$ integrali ita sumto, ut evanescat facto $x = 0$. His poerit pressio, quam curva secundum normalem sustinet,

$$= \frac{Pdy}{ds} + \frac{2(b + \int Pdx)dxddy}{ds^3}$$

sumto elemento dx pro constante. Iam cum pressio debeat esse constans, ponatur ea $= k$; erit

$$kds^3 = Pds^2dy + 2bdxddy + 2dxddy\int Pdx.$$

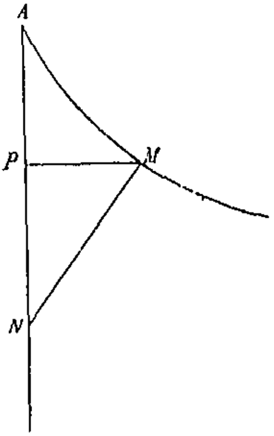


Fig. 32.

ponatur ds constans, habebitur

$$kdsdx = Pdxdy + 2bddy + 2ddy\int Pdx,$$

integralis est

$$\frac{2dy\sqrt{(b + \int Pdx)}}{ds} = \int \frac{kdx}{\sqrt{(b + \int Pdx)}}.$$

aequatio, cum P per x detur, construi potest, quia y in eam non inur, sed tantum dy. Q. E. I.

COROLLARIUM 1

225. Exprimit

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(b+\int Pdx)}}$$

tempus, quo corpus ex A celeritate initiali eadem, qua p
per altitudinem AP delabitur, et $\sqrt{(b+\int Pdx)}$ dat celeritate
Quare celeritas haec in P per tempus per AP divisa dat $\frac{kd}{2d}$
tate curva AM determinatur.

COROLLARIUM 2

226. Tempus autem per AP quantitate constante qua
potest augeri. Hacque quantitate constante angulus, quem
AP constituit, determinatur. Erit scilicet sinus huius ang
sinu toto $=1$. Quare $\sqrt{c}$ maior non potest accipi quam
motus in A a quiete incipit, c debet esse $=0$.

EXEMPLUM

227. Sit potentia uniformis seu $P=g$; erit

$$\int \frac{kdx}{\sqrt{(b+gx)}} = \frac{2k\sqrt{(b+gx)}-2k\sqrt{b}+2k\sqrt{c}}{g} = \frac{2dy\sqrt{(b}}{ds}$$

unde habetur

$$\frac{dy}{ds} = \frac{k}{g} + \frac{k(\sqrt{c}-\sqrt{b})}{g\sqrt{(b+gx)}}$$

atque

$$gdy\sqrt{(b+gx)} = kds\sqrt{(b+gx)} + kds(\sqrt{c}-\sqrt{b})$$

Ex qua orietur sequens aequatio

$$dy = \frac{kdx(\sqrt{(b+gx)}+\sqrt{c}-\sqrt{b})}{\sqrt{(g^2(b+gx)-k^2(\sqrt{(b+gx)}+\sqrt{c}-\sqrt{b})^2)}}.$$

Sit $\sqrt{(b+gx)}=t$ et $-\sqrt{c}+\sqrt{b}=h$; erit

$$x = \frac{t^2-b}{g} \quad \text{et} \quad dx = \frac{2tdt}{g}.$$

itur substitutis habebitur

$$dy = \frac{2ktdt(t-h)}{g\sqrt{(g^2t^2 - k^2t^2 + 2k^2ht - k^2h^2)}}.$$

Haec aequatio tribus casibus integrationem admittit, quorum primus est, si tum enim invenitur curva, quam corpus in A proiectum libere describit. est casus, quando $h = 0$ seu $\sqrt{b} = \sqrt{c}$; tum enim habetur

$$\frac{dy}{ds} = \frac{k}{g}$$

nea satisfaciens erit recta inclinata. Si tertio $k = g$ seu si tota pressio tur ubique vi sollicitanti corpus g, erit

$$dy = \frac{2ttdt - 2htdt}{g\sqrt{(2ht - h^2)}},$$

integralis est

$$gy = \frac{(2tt - 2ht - 2h^2)}{5h}\sqrt{(2ht - h^2)} + \text{const.}$$

ans haec, quia posito $x = 0$ seu $t = \sqrt{b}$ fit $y = 0$, debet esse

$$= \frac{(2h^2 + 2h\sqrt{b} - 2b)}{5h}\sqrt{(2h\sqrt{b} - h^2)}.$$

uto ergo $\sqrt{(b + gx)}$ loco t et posito $\sqrt{b} - \sqrt{c} = h = \sqrt{a}$ habebitur

$$= (b + gx - a - \sqrt{a(b + gx)})\sqrt{(2\sqrt{a(b + gx)} - a)} + (a - b + \sqrt{ab})\sqrt{(2\sqrt{ab} - a)}.$$

est aequatio pro curva quaesita, in qua a debet esse numerus minor b.

i corpus ex quiete cadere debet, alia linea praeter rectam non satis- Debet enim esse $c = 0$, ut angulus ad A sit realis, et propterea habetur

$$y = \frac{kx}{\sqrt{(g^2 - k^2)}}.$$

COROLLARIUM 3

228. Aequatio algebraica inventa, si ab irrationalitate liberetur, fi quinti. Si in ea ponatur $a = b$, quo casu curvae tangens in A est v prodibit

$$\frac{5gy\sqrt{a}}{2} = (gx - \sqrt{(a^2 + gax)})\sqrt{(2\sqrt{(a^2 + gax)} - a)} + a\sqrt{a}.$$

COROLLARIUM 4

229. Si generaliter tangens in A debeat esse verticalis, erit $\sqrt{c} =$ ideo prodibit ista aequatio

$$dy = \frac{kdx(\sqrt{(b + gx)} - \sqrt{b})}{\sqrt{\big(g^2(b + gx) - k^2(\sqrt{(b + gx)} - \sqrt{b})^2\big)}}.$$

Si tangens in A ponatur horizontalis, erit

$$k\sqrt{c} = g\sqrt{b}$$

habebiturque haec aequatio

$$dy = \frac{dx(k\sqrt{(b + gx)} + (g - k)\sqrt{b})}{\sqrt{\big(g^2(b + gx) - (k\sqrt{(b + gx)} + (g - k)\sqrt{b})^2\big)}}.$$

SCHOLION

230. Vocatur haec curva *linea aequabilis pressionis* eiusque solu in Comment. Acad. Paris., quae cum hac nostra egregie c Ceterum ex solutione constat, si potentia non fuerit constans, sed variabilis P, aequationem inventam nihilominus integrationem adm pressio in curvam ipsi P debeat esse proportionalis. Erit enim $k =$ pro curva quaesita prodibit sequens aequatio

$$\frac{2dy\sqrt{(b + \int Pdx)}}{ds} = \int \frac{mPdx}{\sqrt{(b + \int Pdx)}},$$

1) G. F. de l'Hospital (1661—1704), *Solution d'un problème physico-mathémati par* Jean Bernoulli, Mém. de l'acad. d. sc. de Paris 1700, p. 9. Vide etiam Comm P. Varignon (1654—1722), *Usage d'une intégrale donnée par G. F. de l'Hospital, ou sur des courbes en général, avec la solution de quelques autres questions approchantes d* Mém. de l'acad. d. sc. de Paris 1710, p. 158. P. St.

integralis est

$$dy\sqrt{(b+\int Pdx)} = mds\sqrt{(b+\int Pdx)} + mds\sqrt{c}.$$

aequatio, si fuerit $c = 0$, erit pro linea recta ad horizontem inclinata. r $\sqrt{c}$ definitur angulus, quem curva in A cum verticali constituit; eius sinus est $m + \frac{m\sqrt{c}}{\sqrt{b}}$. Quare si sumatur $\sqrt{c} = -\sqrt{b}$, curva tangot in A ılem. Praeterea haec curva hanc habet proprietatem, ut tempus, quo AM percurritur, proportionale sit $m \cdot AM - PM$. Denique ex solutione propositionis fluit solutio sequentis, in qua ex data curva et pressione bili quaeritur quantitas potentiae deorsum tendentis.

PROPOSITIO 26

PROBLEMA

31. *Data curva AM* (Fig. 32, p. 87) *et celeritate initiali in A debita alti- b invenire quantitatem potentiae perpetuo deorsum tendentis, quae faciat, ut super curva AM descendens curvam ubique aequaliter premat.*

SOLUTIO

Sit potentia sollicitans quaesita $= P$, dictisque $AP = x$, $PM = y$ et $= s$ atque pressione, quam curva sustinet, $= k$ habebitur ista aequatio

$$kdsdx = Pdxdy + 2bddy + 2ddy\int Pdx$$

, in qua ds est elementum constans. Ex hac igitur aequatione quan- n P erui oportet. Aequatio autem per dy multiplicata et integrata dat

$$kds\int dxdy = dy^2\int Pdx + bdy^2,$$

a prodit

$$\int Pdx + b = \frac{kds}{dy^2}\int dxdy;$$

differentiata dat

$$P = \frac{kds}{dy} - \frac{2kdsddy}{dxdy^3}\int dxdy.$$

At integrale $\int dxdy$ ita est sumendum, ut posito $x = 0$ fiat

$$\frac{kds}{dy^2}\int dxdy = b.$$

Quo autem haec integratio facilius succedat, ponatur $dy = pdx$; eri

$$ds = dx\sqrt{(1+p^2)} \quad \text{et} \quad \int dxdy = ds\int\frac{pdx}{\sqrt{(1+pp)}}$$

ideoque

$$\frac{kds}{dy^2}\int dxdy = \frac{k(1+pp)}{p^2}\int\frac{pdx}{\sqrt{(1+pp)}}.$$

Ex qua aequatione prodibit

$$P = \frac{k\sqrt{(1+pp)}}{p} - \frac{2kdp}{p^3dx}\int\frac{pdx}{\sqrt{(1+pp)}}.$$

Q. E. I.

COROLLARIUM 1

232. Ex hac aequatione quoque statim celeritas corporis i punctis habetur; altitudo enim debita celeritati corporis in M est

$$b + \int Pdx = \frac{kds}{dy^2}\int dxdy = \frac{k(1+pp)}{p^2}\int\frac{pdx}{\sqrt{(1+pp)}}.$$

Tempus vero, quo arcus AM absolvitur, est

$$= \frac{1}{\sqrt{k}}\int pdx : \sqrt{\int\frac{pdx}{\sqrt{(1+p^2)}}}.$$

COROLLARIUM 2

233. Perspicuum est ex aequatione inventa quantitatem poten fore maiorem, quo maior sit k ceteris paribus; variabilis enim ductus est in pressionem k.

COROLLARIUM 3

234. Etsi vero non videatur potentia P a celeritate initiali quia in expressione b non inest, tamen pendet P ab b ob integ

$$\int\frac{pdx}{\sqrt{(1+pp)}},$$

a est accipiendum, ut posito $x=0$ fiat

$$\frac{k(1+pp)}{p^3}\int\frac{pdx}{\sqrt{(1+pp)}}=b.$$

ergo celeritate initiali alia prodit potentia sollicitans, tametsi curva ta eadem maneat.

EXEMPLUM 1

5. Sit curva AM parabola in A verticem et axem horizontalem habens, sit $ay=x^2$. Erit ergo

$$dy=\frac{2xdx}{a}\quad \text{hincque}\quad p=\frac{2x}{a}$$

$$\int\frac{pdx}{\sqrt{(1+pp)}}=\int\frac{2xdx}{\sqrt{(a^2+4x^2)}}=\frac{1}{2}\sqrt{(a^2+4x^2)}+C.$$

erit

$$\frac{k(1+pp)}{p^2}\int\frac{pdx}{\sqrt{(1+pp)}}=\frac{k(a^2+4x^2)^{\frac{3}{2}}}{8x^2}+\frac{kC(a^2+4x^2)}{4x^2}.$$

uantitas cum debeat esse $=b$, si fit $x=0$, erit $C=\frac{-a}{2}$ seu

$$\int\frac{pdx}{\sqrt{(1+pp)}}=\frac{\sqrt{(a^2+4x^2)}-a}{2}.$$

ibus invenietur

$$P=\frac{ka^3}{4x^3}-\frac{k(a^2-2x^2)\sqrt{(a^2+4x^2)}}{4x^3}.$$

o ergo puncto A potentia P erit infinite parva; tam numerator enim denominator evanescunt fitque valor istius expressionis $=0$. Celeritas n A non potest esse arbitraria, etiam si constans C videatur ex b deata. Nam C talem tantum habet valorem, qui expressionem

$$b+\int Pdx=\frac{kds}{dy^3}\int dxdy$$

finitae magnitudinis. Pendebit ergo b ab a eiusque valor invenietur,

si in expressione

$$\frac{k(a^2+4x^2)^{\frac{3}{2}}-ka(a^2+4x^2)}{8x^2}$$

ponatur $x=0$. Tum autem prodibit

$$b=\frac{ka}{4}.$$

Hac ergo celeritate descensus incipere debet, ut pressio ub
potentia P inventa oriatur.

EXEMPLUM 2

236. Sit curva AM circulus radii a tangens rectam AP

$$y=a-\sqrt{(a^2-x^2)} \quad \text{et} \quad p=\frac{x}{\sqrt{(a^2-x^2)}} \quad \text{atque} \quad \sqrt{(1+pp)}$$

Fiet ergo

$$\int\frac{pdx}{\sqrt{(1+pp)}}=\int\frac{xdx}{a}=\frac{x^2}{2a},$$

ad quod constantem addere non licet, quia $\frac{1+pp}{pp}=\frac{a^2}{x^2}$ fit i
scente x. Erit ergo

$$k\frac{(1+pp)}{pp}\int\frac{pdx}{\sqrt{(1+pp)}}=\frac{ka}{2}=b+\int Pdx;$$

quare celeritas corporis erit uniformis ideoque potentia sollic
Perspicuum enim est corpus a nulla potentia sollicitatum in
culi aequabiliter progredi eiusque vim centrifugam esse u
magnitudinis.

EXEMPLUM 3

237. Sit curva AM cyclois basin habens horizontalem et
verticalem AP in A, ita ut sit

$$dy=\frac{dx\sqrt{2ax}}{\sqrt{(a^2-2ax)}}.$$

$$p = \frac{\sqrt{2ax}}{\sqrt{(a^2 - 2ax)}} \quad \text{et} \quad \sqrt{(1+pp)} = \frac{a}{\sqrt{(a^2-2ax)}}.$$

$$\int \frac{pdx}{\sqrt{(1+pp)}} = \int \frac{dx\sqrt{2ax}}{a} = \frac{2x\sqrt{2x}}{3\sqrt{a}} + C$$

$$\frac{k(1+pp)}{pp} = \frac{ka}{2x}.$$

constante C finitae magnitudinis fit $b = \infty$; quare fiat $C = 0$; erit

$$b + \int Pdx = \frac{k\sqrt{2ax}}{3}$$

rodibit igitur

$$P = \frac{k\sqrt{a}}{3\sqrt{2x}}.$$

rpus super cycloide AM ex A descendat ex quieto et sollicitetur otentia, quae reciproce est ut radix quadrata ex abscissa AP, e curvam aequali vi premet.

SCHOLION

ntur igitur casus, quibus celeritatem $\sqrt{b}$ non pro lubitu assumere dmodum in his exemplis evenit. Quoties enim $\frac{1+pp}{pp}$ fit infinite o $x = 0$, constans in integratione ipsius $\frac{pdx}{\sqrt{(1+pp)}}$ addenda plerum- determinatur, quod celeritas initialis non debeat esse infinite nper autem, si curva in A tangit rectam AP, fit $\frac{1+pp}{pp}$ infinitum , id quod in causa etiam est, quod in exemplis allatis celeritas sit arbitraria.

PROPOSITIO 27

PROBLEMA

corpus a quacunque vi perpetuo deorsum trahatur, invenire curvam 2, p. 87), *super qua corpus ita movetur, ut tota pressio, quam curva m habeat rationem ad pressionem a vi normali ortam.*

SOLUTIO

Descendat corpus ex A celeritate debita altitudini b e
$PM = y$, $AM = s$ sit potentia corpus in M sollicitans
debita celeritati, quam corpus in M habet, $= b + \int Pdx$,
quam curva in M secundum directionem normalis MN sust

$$= \frac{Pdy}{ds} + \frac{2ddy(b + \int Pdx)}{dxds}$$

sumto ds pro elemento constante. Iam habeat se haec pr
malem $\frac{Pdy}{ds}$ ut m ad 1; erit

$$(m-1)Pdxdy = 2ddy(b + \int Pdx),$$

quae est aequatio pro curva quaesita. Haec vero reducetu
$b + \int Pdx$ ad hanc formam

$$\frac{(m-1)dv}{v} = \frac{2ddy}{dy},$$

quae integrata dat

$$2l\frac{dy}{ds} = (m-1)l\frac{v}{a} \quad \text{seu} \quad v^{\frac{m-1}{2}}ds = a^{\frac{m-1}{2}}dy$$

Ex qua habebitur

$$dy = \frac{v^{\frac{m-1}{2}}dx}{\sqrt{(a^{m-1} - v^{m-1})}} = \frac{dx(b + \int Pdx)^{\frac{m-1}{2}}}{\sqrt{(a^{m-1} - (b + \int Pdx)^{m-1})}},$$

quae est aequatio pro curva quaesita. Q. E. I.

COROLLARIUM 1

240. Celeritas corporis ibi est nulla, ubi $\frac{dy}{ds} = 0$ seu u
est verticalis, si quidem $\frac{m-1}{2}$ fuerit numerus positivus seu
unitate. In his igitur casibus curvam in A tangere ponem
celeritatem initialem seu $b = 0$.

COROLLARIUM 2

1. Quare si $m > 1$ seu si pressio tota maior est quam pressio a vi orta, curvam quaesitam dabit ista aequatio

$$dy = \frac{dx(\int Pdx)^{\frac{m-1}{2}}}{\sqrt{(a^{m-1} - (\int Pdx)^{m-1})}},$$

$\int Pdx$ ita debet accipi, ut evanescat posito $x = 0$.

COROLLARIUM 3

2. Si $m = 1$, vis centrifuga evanescet et propterea linea quaesita erit Fit autem ex aequatione $ddy = 0$, quae est proprietas lineae rectae.

COROLLARIUM 4

3. Si $m = 0$, tum tota pressio evanescit; quare tum prodibit curva, corpus celeritate sua altitudini b debita proiectum libere describit. Pro tur curva habebitur ista aequatio

$$dy = \frac{dx\sqrt{a}}{(b - a + \int Pdx)}.$$

COROLLARIUM 5

4. Si m est unitate minor, tunc vis centrifuga erit contraria vi nor- t propterea curva AM erit concava deorsum. Ponamus igitur in A esse normalem ad AP; erit $b = a$. Posito igitur $b = a$ habebitur rva quaesita haec aequatio

$$dy = \frac{a^{\frac{1-m}{2}}\,dx}{\sqrt{((a + \int Pdx)^{1-m} - a^{1-m})}}.$$

COROLLARIUM 6

5. Pro motu libero igitur, quo casu est $m = 0$, invenietur curva a descripta, si in A horizontaliter celeritate altitudini a debita proiiciatur, aequatione

$$dy = \frac{dx\sqrt{a}}{\sqrt{\int Pdx}}.$$

EXEMPLUM 1

246. Sit vis sollicitans uniformis seu $P = g$; erit $\int$
ergo, quibus $m > 1$ et corpus in A ex quieto descendit,
quaesitis scripto gc loco a erit haec

$$dy = \frac{x^{\frac{m-1}{2}}\,dx}{\sqrt{(c^{m-1} - x^{m-1})}}.$$

At si sit $m < 1$ et corpus in A celeritate altitudini a debi
zontaliter, curva, super qua corpus moveri debebit, scrip
netur hac aequatione

$$dy = \frac{c^{\frac{1-m}{2}}\,dx}{\sqrt{((c+x)^{1-m} - c^{1-m})}}.$$

Hae ergo curvae erunt algebraicae, si vel $\frac{3-m}{2m-2}$ vel
integer affirmativus. Hoc vero evenit, si m fuerit terminu
3, $\frac{5}{3}$, $\frac{7}{5}$, $\frac{9}{7}$, $\frac{11}{9}$ etc. vel ex hac serie 0, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{6}$ e

COROLLARIUM 7

247. Si igitur tota pressio triplo debeat esse maior
curva erit circulus tangens rectam AP in A. Namque er

$$dy = \frac{x\,dx}{\sqrt{(c^2 - x^2)}} \quad \text{seu} \quad y = c - \sqrt{(c^2 - x^2)}$$

aequatio ad circulum radii c.

COROLLARIUM 8

248. Sit tota pressio duplo maior quam vis normalis
aequalis vi normali cum eaque conspirans; erit curva cyc
calem in A tangens. Aequatio enim erit

$$dy = \frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{(c-x)}}.$$

EXEMPLUM 2

). Quaecunque fuerit potentia sollicitans P, requirantur curvae eius-
ut pressio tota, quam curva sustinet, sit duplo maior quam vis nor-
seu quam vis centrifuga, quae hoc casu illi aequalis erit. Fiat igitur
et pro curva quaesita haec habebitur aequatio

$$dy = \frac{dx\sqrt{\int Pdx}}{\sqrt{(a-\int Pdx)}}.$$

to $\int Pdx = X$ erit

$$dy = dx\sqrt{\frac{X}{a-X}} = \frac{Xdx}{\sqrt{(aX-X^2)}}.$$

emplum ideo attulimus, quod in sequentibus demonstrabitur curvas
proprietatis esse simul lineas celerrimi descensus.

COROLLARIUM 9

). Perspicitur ergo infinitas esse curvas quaestioni satisfacientes propter
ntem a arbitrariam. Atque infinitae hae curvae omnes tangent rectam
A.

SCHOLION 1

l. Ex solutione huius problematis apparet, quomodo problema inver-
uo curva et ratio inter totam pressionem et vim normalem datur, at
as vis sollicitantis deorsum tendentis quaeritur, solvi debeat. Cum
t

$$v^{\frac{m-1}{2}}ds = a^{\frac{m-1}{2}}dy$$

ito $dy = pdx$

$$v^{\frac{m-1}{2}}\sqrt{(1+pp)} = a^{\frac{m-1}{2}}p,$$

$$v = \frac{ap^{\frac{2}{m-1}}}{(1+pp)^{\frac{1}{m-1}}} = b + \int Pdx$$

differentiando

$$Pdx = \frac{2ap^{\frac{3-m}{m-1}}dp}{(m-1)(1+pp)^{\frac{m}{m-1}}}.$$

Consequenter invenitur

$$P = \frac{2ap^{\frac{3-m}{m-1}}dp}{(m-1)(1+pp)^{\frac{m}{m-1}}dx}.$$

Ubi notandum celeritatem initialem iam esse datam; nam

$$\frac{ap^{\frac{2}{m-1}}}{(1+pp)^{\frac{1}{m-1}}},$$

si in ea ponatur $x = 0$, dat b.

SCHOLION 2

252. Similili modo, si motus corporis seu celeritas ei
detur atque relatio pressionis totius ad vim normalem, i
ritate statim potentia sollicitans. Ut sit v altitudo debi
erit ob $b + \int Pdx = v$

$$P = \frac{dv}{dx}$$

atque aequatio

$$v^{\frac{m-1}{2}}ds = a^{\frac{m-1}{2}}dy$$

dabit naturam curvae requisitae. Cum enim v sit data,
vel s et constantibus quantitatibus, scilicet quae ad cur
mendam adhibentur. Ceterum eadem problemata in hypo
petarum vel plurium potentiarum sollicitantium proposi
difficultatis, etiamsi ad magis perplexas aequationes perve
simplicia exempla in medium proferre non liceat ad illus
relinquo, hocque eo magis, quod in sequentibus, ubi
agetur, eiusdem naturae curvae prodeant, quas ibi dili
sum. Nunc igitur ad ea progredior problemata, in quib
proprietas proponitur, ex qua coniuncta vel cum potent
quaeritur vel cum curva ipsa potentia sollicitans. Pr
facilia, ut quando vel scala celeritatum vel scala tempor
mitto, cum ex expressione celeritatis vel potentia sollic
sponte fluat atque temporis expressio facillime ad celerit
ob rem huiusmodi afferemus quaestiones, in quibus non
tempora dantur, sed relationes quaedam ab iis pendentes

PROPOSITIO 28

PROBLEMA

253. *Sollicitetur corpus a quacunque potentia deorsum tendente; invenire c... m AM* (Fig. 33), *super qua corpus descendens motu aequabili deorsum fera... u aequabiliter a horizontali AB recedat.*

SOLUTIO

Positis $AP = x$, $PM = y$, $AM = s$ et potentia sollicitante $= P$ sit c... tas corporis initialis in A debita altitudini b; erit celeritas in M deb... titudini $b + \int Pdx$. Quare tempusculum, quo elementum Mm percurri... t

$$\frac{ds}{\sqrt{(b+\int Pdx)}}.$$

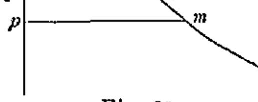


Fig. 33.

uia autem motus per AM respondere debet motui equabili per AP, concipiatur corpus motum super P celeritate constante debita altitudini b; debit tempus per Pp aequari tempori per Mm, nde habebitur

$$\frac{dx}{\sqrt{b}} = \frac{ds}{\sqrt{(b+\int Pdx)}}$$

u

$$dy\sqrt{b} = dx\sqrt{\int Pdx}.$$

ono autem celeritatem initialem congruentem cum celeritate descensus, ... urva in A tangat verticalem AP et corpus primo principio recta descen... am quia propter motum acceleratum necesse est, ut curva continuo m... d horizontem inclinetur, eius initium commodissime sumetur in A, ... urva est verticalis. Prodiitque ergo pro hac curva aequatio

$$dy\sqrt{b} = dx\sqrt{\int Pdx}.$$

. E. I.

COROLLARIUM 1

254. Haec ergo curva hanc habet proprietatem, ut, q
poris celeritas, eo magis quoque curva in eo loco ad horizo

COROLLARIUM 2

255. In loco ergo supremo, ubi celeritas corporis est
curvae debet esse minima seu tangens curvae in eo loco de

COROLLARIUM 3

256. Celeritas igitur initialis $\sqrt{b}$ non potest esse nulla
est celeritas respectiva, qua corpus deorsum progreditur
AB recedit.

SCHOLION 1

257. Vocatur haec curva *linea aequabilis descensus*, qui
descendens aequabili motu deorsum progreditur. Lineae h
in Act. Erud. Lips. A. 1689[1]) pro hypothesi gravitatis s
citantis uniformis[2]). Satisfacere autem huic quaestioni
parabola cubicalis NEILIANA, quae eadem in exemplo seque

EXEMPLUM 1

258. Sit potentia sollicitans uniformis seu $P = g$;
Quare pro curva quaesita habebitur ista aequatio

$$dy\sqrt{b} = dx\sqrt{gx},$$

quae integrata praebet hanc

$$3y\sqrt{b} = 2x\sqrt{gx} \quad \text{seu} \quad \frac{9by^2}{4g} = x^3,$$

1) Editio princeps: *A. 1690.* Correxit P. St.

2) G. W. LEIBNIZ, *De linea isochrona, in qua grave sine acceleratione*
1689, p. 195; *Mathematische Schriften,* herausgegeben von C. I. GERHARD
Halle 1858, p. 234. P. St.

pro parabola NEILIANA cuspide in A verticalem AP tangente, cuius r est $\frac{9b}{4g}$. Pro quaque ergo alia celeritate initiali alia est sumenda .

EXEMPLUM 2

Sit potentia sollicitans P potestati cuicunque abscissarum data ctarum proportionalis ut

$$P = \frac{(a+x)^n}{f^n};$$

$$\int P dx = \frac{(a+x)^{n+1} - a^{n+1}}{(n+1)f^n}.$$

em pro curva satisfaciente habebitur ista aequatio

$$dy\sqrt{(n+1)bf^n} = dx\sqrt{((a+x)^{n+1} - a^{n+1})}.$$

ita ut potentia sollicitans P sit potestati exponentis n distantiarum a horizontali AB proportionalis, erit

$$dy\sqrt{(n+1)bf^n} = dx\sqrt{x^{n+1}},$$

egralis est

$$y\sqrt{(n+1)bf^n} = \frac{2x^{\frac{n+3}{2}}}{n+3}$$

$$\frac{(n+1)(n+3)^2}{4}bf^n y^2 = x^{n+3}.$$

debet esse numerus affirmativus; alioquin $\int Pdx$ fieret infinitum, nescere debet facto $x=0$. Fit ergo $n+3>2$; quare satisfaciunt verticibus in A verticalem AP tangentes. Ut, si $n=1$ seu satisfaciet parabola APOLLONIANA, cuius parameter est $2\sqrt{2bf}$.

SCHOLION 2

Ex huius propositionis solutione perspicitur, quomodo eius inversa , qua data curva, quae sit linea aequabilis descensus, requiritur sollicitans. Cum enim sit

$$dy\sqrt{b} = dx\sqrt{\int Pdx},$$

erit

$$\int Pdx = \frac{bdy^2}{dx^2}.$$

Ex qua oritur posito dx constante

$$P = \frac{2bdyddy}{dx^3}.$$

Perspicitur ergo potentiam P a celeritate initiali $\sqrt{b}$ pend
data ita esse debet comparata, ut in A tangat verticalem
radius osculi in M dicatur r, erit

$$P = \frac{2bds^3dy}{rdx^4}.$$

Quare si ex. gr. curva AM fuerit circulus tangens AP in
$= a$, erit

$$r = a, \quad dy = \frac{xdx}{\sqrt{(a^2 - x^2)}} \quad \text{et} \quad ds = \frac{adx}{\sqrt{(a^2 - x^2)}}$$

Pro circulo ergo erit

$$P = \frac{2a^2bx}{(a^2 - x^2)^2}.$$

Celeritas vero in M debita est altitudini

$$b + \int Pdx = \frac{a^2b}{a^2 - x^2}.$$

COROLLARIUM 4

261. Patet ceterum ex aequatione, quam invenimus [§

$$\frac{dx}{\sqrt{b}} = \frac{ds}{\sqrt{(b + \int Pdx)}}$$

tempus, quo arcus AM describitur, aequale esse tempori, q
miter celeritate altitudini b debita abscissam AP percurr
scilicet natura lineae aequabilis descensus nititur.

PROPOSITIO 29

PROBLEMA

Trahente uniformi potentia ubique verticaliter deorsum invenire curvam g. 34), *super qua corpus aequabiliter versus datam plagam AP progreditur.*

SOLUTIO

AM curva quaesita et pro axo sumatur eius tangens AP, quae atam plagam dirigitur. Problema ergo requirit, ut corpus super AM potentia uniformi g sollicitatum eodem ad M perveniat, quo corpus motu , nempe celeritate $\sqrt{b}$, latum abscissam ntem AP percurrit, eritque celeritas in A debita altitudini b. Dicantur $PM = y$ et $AM = s$ ducaturque AQ in Q secans horizontalem MQ. igitur corporis in M tanta erit, quan- Q cadendo per AQ cum sua celeritate reret; quare celeritas corporis in M rit altitudini $b + gz$ dicta $AQ = z$. litionem problematis vero debet esse

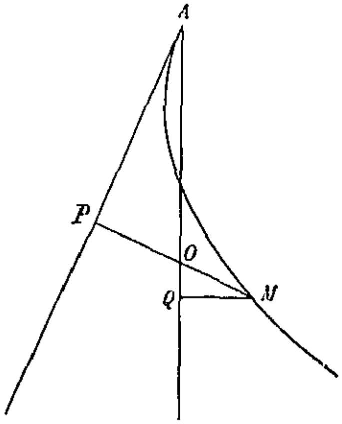


Fig. 34.

$$\int \frac{ds}{\sqrt{(b+gz)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{b}} \quad \text{seu} \quad \frac{ds}{\sqrt{(b+gz)}} = \frac{dx}{\sqrt{b}},$$

ur haec aequatio

$$dy\sqrt{b} = dx\sqrt{gz}.$$

x et y dabitur ex angulo PAQ; sit sinus huius anguli $= m$, erit $= \sqrt{(1-m^2)}$ posito sinu toto $= 1$. Nunc erit

$$\sqrt{(1-m^2)} : m = AP\,(x) : PO,$$

rit

$$PO = \frac{mx}{\sqrt{(1-m^2)}} \quad \text{ideoque} \quad MO = \frac{y\sqrt{(1-m^2)} - mx}{\sqrt{(1-m^2)}}.$$

At AO fiet
$$=\frac{x}{\sqrt{(1-m^2)}}.$$
Deinde ob $1:m = MO:OQ$ erit
$$OQ = \frac{my\sqrt{(1-m^2)} - m^2x}{\sqrt{(1-m^2)}}.$$
Consequenter
$$AQ = z = my + x\sqrt{(1-m^2)}$$
et hinc
$$dy = \frac{dz}{m} - \frac{dx\sqrt{(1-m^2)}}{m}.$$

Quo valore in aequatione inventa substituto prodit
$$dz\sqrt{b} = dx\sqrt{b(1-m^2)} + m\,dx\sqrt{gz},$$
quae transit in hanc
$$dx = \frac{dz\sqrt{b}}{m\sqrt{gz} + \sqrt{b(1-m^2)}}.$$
Cuius integralis invenitur
$$x = \frac{2\sqrt{bz}}{m\sqrt{g}} - \frac{2b\sqrt{(1-mm)}}{m^2g}\, l\, \frac{m\sqrt{gz}+\sqrt{b(1-m^2)}}{\sqrt{b(1-m^2)}}$$

Quae aequatio loco z valore $my + x\sqrt{(1-m^2)}$ substit
curvae quaesitae. Q. E. I.

COROLLARIUM 1

263. Curva ergo satisfaciens semper est linea trans
logarithmis pendens, nisi sit m vel 0 vel 1, i. e. nisi recta
calis vel horizontalis.

COROLLARIUM 2

264. Si igitur $m = 0$, problema cum praecedente c
$z = x$ ideoque curva exprimetur hac aequatione
$$dy\sqrt{b} = dx\sqrt{gx},$$
quae dat parabolam cubicalem ut supra.

1) Editio princeps: $x = \frac{2\sqrt{bz}}{m^2g} - \cdots$ Correxit P. St.

COROLLARIUM 3

265. Si $m = 1$, fit linea AP horizontalis et $z = y$. Habetur ergo

$$dx = \frac{dy\sqrt{b}}{\sqrt{gy}} \quad \text{seu} \quad x = \frac{2\sqrt{by}}{\sqrt{g}} \quad \text{seu} \quad x^2 = \frac{4by}{g}.$$

ergo curva est ipsa proiectoria, quam corpus in A celeritate $\sqrt{b}$ horiliter proiectum libere describit. Haec enim curva, ut ex superiore libro] intelligitur, hanc habet proprietatem, ut motus horizontalis sit aequa-

COROLLARIUM 4

266. Si x et y et consequenter z est valde parvum, erit

$$l\left(1 + \frac{m\sqrt{gz}}{\sqrt{b(1-m^2)}}\right) = \frac{m\sqrt{gz}}{\sqrt{b(1-m^2)}} - \frac{mmgz}{2b(1-m^2)} + \frac{m^3gz\sqrt{gz}}{3b(1-m^2)\sqrt{b(1-m^2)}}$$

proxime. Initium ergo curvae AM exprimetur hac aequatione

$$x = \frac{z}{\sqrt{(1-m^2)}} - \frac{2mz\sqrt{gz}}{3(1-m^2)\sqrt{b}}$$

ob $z = my + x\sqrt{(1-m^2)}$ ista

$$y = \frac{2(my + x\sqrt{(1-m^2)})\sqrt{g(my + x\sqrt{(1-mm)})}}{3\sqrt{b}(1-m^2)},$$

reducitur ad hanc

$$\frac{9b(1-m^2)y^2}{4g} = (my + x\sqrt{(1-m^2)})^3.$$

COROLLARIUM 5

267. Si $m = 1$ seu si linea AP est horizontalis et series logarithmo ill alis continuetur in infinitum haecque series loco illius substituatur, ter omnes prae infinitesimo ∞ evanescent. Dabit autem infinitesimu seu $y = 0$, id quod indicat hoc casu lineam rectam horizontalem quo

que satisfacere. Id quod quidem per se est perspicuum;
recta horizontali aequabiliter progredietur, ideoque motu
est aequabilis.

SCHOLION 1

268. Mirabile igitur videtur, quod aequatio differen
quoque, quae prodit, si ponatur $m=1$, parabolam tantum
horizontalem excludere videatur. Sed notandum est linea
talem pro omnibus quoque plagis AP satisfacere, cum mo
bilis atque ideo versus omnes plagas aequabiliter progred
autem est aequationem nostram generalem hanc rectam
posse, quia rectam AP nusquam tangit nisi in casu n
congruit. Atque haec ipsa ratio quoque est, cur pro
linea recta non directe inveniri queat.

SCHOLION 2

269. Manifestum quoque est eadem opera problema
tum solvi potuisse, si scilicet potentia sollicitans non un
bilis utcunque esset posita. Namque substituto P loco
in aequatione differentiali prodisset haec aequatio

$$dy\sqrt{b} = dx\sqrt{\int Pdz}$$

pro curva quaesita. Habet vero z eundem valorem quem
ab altitudine z et constantibus tantum pendeat, poterit $\int$
vel per quadraturas exhiberi. Atque tum aequatio pro cur
pervenietur enim ad hanc aequationem

$$dx = \frac{dz\sqrt{b}}{m\sqrt{\int Pdz} + \sqrt{b(1-m^2)}},$$

in qua variabiles x et z sunt a se invicem separatae. No
nimis lata significatione confusum efficere. Quando enim
neque plus difficultatis habet in se neque ad peculiarem
potest, eo relicto particulare tantum problema pertractare
eandem rationem sequens problema isochronae paracent
tantum potentiae uniformis et deorsum directae resolvo.

PROPOSITIO 30

PROBLEMA

. *In hypothesi potentiae sollicitantis uniformis et deorsum tendentis inve-rvam AM* (Fig. 35), *super qua corpus descendens aequabiliter a dato C recedit.*

SOLUTIO

AM curva quaesita; eius sumatur tangens CA, quae per datum C transit; erit corporis in A celeritas minima. Quia enim haec tota ad recedendum a C impen-n aliis curvae elementis necesse est, tas sit maior, eo, quod eius tantum recessum insumitur. Punctum A t supremum curvae quaesitae. Sit leritas corporis in A debita altitu-aeque celeritate concipiatur corpus uniformiter moveri; debebit itaque tus cum descensu corporis super M ita convenire, ut ad quaeque P et M aequaliter ab C distantia erveniatur. Posita celeritate in M ltitudini v ducatur $CP = CM = x$ sinus ang. $PCM = t$ posito sinu 1. Ducantur arcus circulares PM entro C; erit $Mn = Pp = dx$ et ang. pCm sinus $= t + dt$. Quare

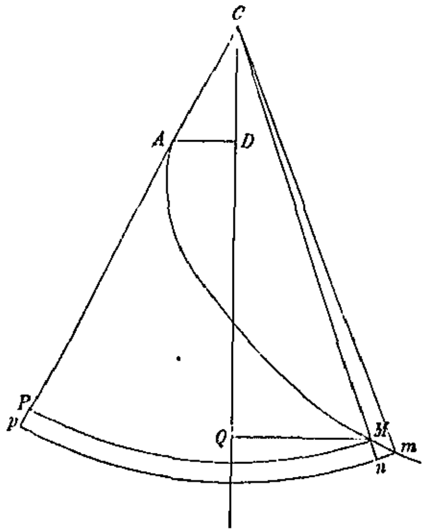


Fig. 35.

$$\text{sinus ang. } mCn = \frac{dt}{\sqrt{(1-tt)}} = \frac{mn}{x}.$$

ur

$$mn = \frac{xdt}{\sqrt{(1-tt)}} \quad \text{atque} \quad Mm = \sqrt{\left(dx^2 + \frac{x^2dt^2}{1-tt}\right)}.$$

o elementum Mm celeritate $\sqrt{v}$ eodem tempore describi debeat, quo um Pp celeritate $\sqrt{b}$, erit

$$\frac{dx}{\sqrt{b}} = \sqrt{\left(\frac{dx^2}{v} + \frac{x^2 dt^2}{(1-tt)v}\right)}$$

seu

$$dx\sqrt{(1-tt)(v-b)} = xdt\sqrt{b}.$$

Requiritur ergo, ut v determinetur. Ad hoc ducatur
et horizontales AD et MQ; postquam ergo corpus ex
deorsum pervenit intervallo DQ. Quare posita potentia

$$v = b + g \cdot DQ = b + g \cdot CQ - g \cdot CD$$

Sit $AC = a$, sinus anguli $ACD = m$; erit eius cosinus
erit

$$CD = a\sqrt{(1-m^2)}$$

et

$$\text{cosinus ang. } MCQ = mt + \sqrt{(1-m^2)(1-}$$

Quam ob rem erit

$$CQ = mtx + x\sqrt{(1-m^2)(1-t^2)}.$$

Ex quibus conficitur

$$v = b - ga\sqrt{(1-m^2)} + mgtx + gx\sqrt{(1-m^2)}$$

Quo loco v valore substituto prodibit ista aequatio

$$dx\sqrt{(1-tt)\left(mgtx + gx\sqrt{(1-m^2)(1-t^2)} - ga\sqrt{(1-}\right.}$$

seu haec

$$\frac{dx}{x}\sqrt{\left(mgtx + gx\sqrt{(1-m^2)(1-t^2)} - ga\sqrt{(1-m^2)}\right.}$$

Quae aequatio exprimit naturam curvae quaesitae et, si
a se invicem separari possent, ipsa curva construi poss

COROLLARIUM 1

271. Perspicuum igitur est ex aequatione inventa
quaesito satisfacere ob tres quantitates, angulum scili
AC et celeritatem $\sqrt{b}$, qua corpus a fixo puncto C re
variari possunt.

COROLLARIUM 2

272. Atque harum trium quantitatum binis quibusque assumtis arbitrio tertia sola variabilis infinitas producet curvas quaesito satisfacie At quia aequatio haec generaliter construi non potest, omnes curvae s facientes exhiberi non possunt.

COROLLARIUM 3

273. Quod ad figuram curvarum harum attinet, intelligitur eas or in A cuspidem habere debere, quia A est punctum supremum. Alter c curvae ramus ex A ad alteram partem rectae AP descendere debet exc casu, quo CAP fit linea horizontalis; tum enim haec ratio cessat.

COROLLARIUM 4

274. Alter vero ramus ad alteram rectae CP partem positus aeque s problema ac iste AM. Invenitur enim eadem ex aequatione, si modo t angulus PCM accipitur negativus.

COROLLARIUM 5

275. Ex sola autem aequationis inventae inspectione perspicitur duobus casibus separationem indeterminatarum admittere, quorum alter si $a=0$, alter, si $m=1$. Illo scilicet casu evanescit distantia AC et ctum A in C incidit; hoc vero casu recta CP fit horizontalis. Hos i ambos casus in sequentibus duobus exemplis evolvemus.

EXEMPLUM 1

276. Incidat ergo punctum A in C, seu corpus descensum incipia ipso puncto C; fiet $a=0$. Hoc ergo casu aequatio pro curva qua abibit in hanc

$$\frac{dx\sqrt{g}}{\sqrt{bx}}=\frac{dt}{\sqrt{(1-tt)(mt+\sqrt{(1-m^2)(1-t^2)})}},$$

in qua indeterminatae a se invicem sunt separatae. Constructio igitur cu

quaesitae per quadraturas confici poterit; fiet enim

$$\frac{2\sqrt{gx}}{\sqrt{b}} = \int \frac{dt}{\sqrt{(1-tt)(mt+\sqrt{(1-m^2)(1-t^2)}}}$$

quae integratio ita debet absolvi, ut facto $t = 0$ fiat x = ralis aequatio ita debet integrari, ut posito $t = 0$ fiat casu integrale

$$\int \frac{dt}{\sqrt{(1-tt)(mt+\sqrt{(1-m^2)(1-t^2)}}}$$

ita est accipiendum, ut facto $t = 0$ ipsum evanescat. huius integralis vero melius perspiciendam pono cosinu

$$mt + \sqrt{(1-m^2)(1-tt)} = q,$$

quo facto fiet sinus ang. MCm seu

$$\frac{dt}{\sqrt{(1-tt)}} = \frac{-dq}{\sqrt{(1-qq)}}.$$

Hisque substitutis habebitur ista aequatio

$$\frac{2\sqrt{gx}}{\sqrt{b}} = \int \frac{-dq}{\sqrt{(q-q^3)}},$$

quod integrale ita est accipiendum, ut facto $q = \sqrt{(1 -$

COROLLARIUM 6

277. Si ipsi b diversi valores attribuantur, omnes erunt inter se similes; manente enim angulo MCP dis nalis est accipienda ipsi b, altitudini generanti celeritat

COROLLARIUM 7

278. Quicunque ergo fuerit angulus ACQ, constr sed tantum constans adiicienda. Quare constructio in omnes casus potest accommodari.

SCHOLION 1

[P]roblema hoc de aequabili recessu a fixo puncto praeterito seculo [p]ropositum et solutum in Act. Lips. A. 1694[1]) atque solutiones, quae [...] conveniunt apprime cum casu huius exempli; universalis enim [...] loco non est data.[2]) Quamobrem casus exempli sequentis novas [...]e videtur curvas huic quaestioni satisfacientes. At quia sequens [...] cum hac convenit, quanquam ipsae curvae sint prorsus differentes, [...]n sequens casus in iis, quae hac de re tradita sunt, contineri [...]est. Vocantur autem istiusmodi curvae *isochronae paracentricae*, [...] super iis a centro fixo fit aequabilis.

EXEMPLUM 2

[...]t linea CAP horizontalis; fiet $m=1$ atque in aequatione generali [...]erminus $ga\sqrt{(1-m^2)}$. Hoc igitur casu aequatio fit ut ante [...] transmutabitur enim generalis aequatio in hanc

$$\frac{dx\sqrt{g}}{\sqrt{bx}}=\frac{dt}{\sqrt{(t-t^3)}}\quad\text{seu}\quad\frac{2\sqrt{gx}}{\sqrt{b}}=\int\frac{dt}{\sqrt{(t-t^3)}},$$

[...]rale ita est accipiendum, ut posito $t=0$ fiat $x=a$. Quare [...] integrato, ut evanescat posito $t=0$, erit

$$\frac{2\sqrt{gx}-2\sqrt{ga}}{\sqrt{b}}=\int\frac{dt}{\sqrt{(t-t^3)}}.$$

[...]uctio ergo cum praecedente convenit.

[...] princeps: *A. 1695.* Correxit P. St.

[1]) [...] BERNOULLI, *Solutio problematis* LEIBNITIANI, *de curva accessus et recessus aequabilis [...] mediante rectificatione curvae elasticae*, Acta erud. 1694, p. 276; *Opera*, Genevae [...]

[...]NOULLI, *Constructio curvae accessus et recessus aequabilis, ope rectificationis curvae [...]raicae*, Acta erud. 1694, p. 336; *Opera*, Genevae 1744, p. 608.

[...]EIBNIZ, *Constructio propria problematis de curva isochrona paracentrica*, Acta [...] p. 364; *Mathematische Schriften*, herausgegeben von C. I. GERHARDT, 2. Abteilung, [...] 1858, p. 309; vide etiam IAC. BERNOULLI, *Opera*, Genevae 1744, p. 627.

[...]NOULLI, *Constructio facilis curvae recessus aequabilis a dato puncto, per rectifica[...] algebraicae*, Acta erud. 1694, p. 394; *Opera omnia*, Tom. I, Lausannae et [...], p. 119. P. St.

SCHOLION 2

281. An praeter hos duos casus alii inveniri queant, indeterminatarum admittant, vehementer dubito. A nemine scio, alius est erutus, quamobrem non necesse esse iudico, diutius immorer.

PROPOSITIO 31

PROBLEMA

282. *Potentia sollicitante existente uniformi et deorsum curvam AM* (Fig. 36), *super qua corpus data cum celeritate i ut aequalibus temporibus aequales angulos circa punctum fixum*

SOLUTIO

Sumatur initium curvae in loco quodam A, in quo curvam est normalis, sitque celeritas in A debita altitud

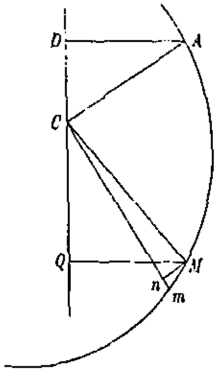


Fig. 36.

erit celeritas angularis ut $\frac{\sqrt{b}}{a}$, cui angularis in singulis punctis M e aequalis. Sit celeritas in M deb $CM = x$, erit $mn = dx$. Fiet ut

$$Mm : Mn = \sqrt{v} : \frac{Mn}{M}$$

quae quantitas per MC divisa dat larem

$$= \frac{Mn \cdot \sqrt{v}}{Mm \cdot MC};$$

quae cum aequalis esse debeat ipsi $\frac{\sqrt{b}}{a}$, habebitur haec ae

$$Mn \cdot a\sqrt{v} = Mm \cdot MC \cdot \sqrt{b} = Mm \cdot x\sqrt{b}.$$

Sit iam ducta verticali DCQ sinus ang. $ACD = m$, $= \sqrt{(1 - m^2)}$ posito sinu toto $= 1$. Item sinus ang. MC

$= \sqrt{(1-tt)}$. His igitur positis erit

$$CD = a\sqrt{(1-m^2)} \quad \text{et} \quad CQ = -x\sqrt{(1-tt)}$$

$$\text{sinus ang. } MCm = \frac{dt}{\sqrt{(1-tt)}} = \frac{Mn}{x},$$

it

$$Mn = \frac{xdt}{\sqrt{(1-tt)}} \quad \text{et} \quad Mm = \frac{\sqrt{(dx^2 - ttdx^2 + x^2dt^2)}}{\sqrt{(1-tt)}}.$$

a corpus ex altitudine DQ est delapsum, erit

$$v = b + g \cdot DQ = b + ga\sqrt{(1-m^2)} - gx\sqrt{(1-tt)}.$$

valoribus in aequatione inventa substitutis orietur haec aequatio

$$dx^2(1-tt) = a^2bdt^2 + ga^3dt^2\sqrt{(1-m^2)} - ga^2xdt^2\sqrt{(1-tt)} - bx^2dt^2$$

$$dx\sqrt{b} = \frac{dt\sqrt{(a^2b + ga^3\sqrt{(1-m^2)} - ga^2x\sqrt{(1-tt)} - bx^2)}}{\sqrt{(1-tt)}}.$$

equatio ita integrata, ut posito $t = m$ fiat $x = a$, exprimit naturam quaesitae. Q. E. I.

COROLLARIUM 1

3. Si loco sinuum angulorum ACD, MCD eorum cosinus introdu- fiatque $\sqrt{(1-m^2)} = n$ et $\sqrt{(1-tt)} = q$, erit

$$dx\sqrt{b} = \frac{-dq\sqrt{(a^2b + gna^3 - ga^2qx - bx^2)}}{\sqrt{(1-q^2)}}$$

$$\frac{-dq}{\sqrt{(1-qq)}} = \frac{dx\sqrt{b}}{\sqrt{(b(a^2-x^2) + ga^2(na - qx))}},$$

a est integranda, ut posito $q = n$ fiat $x = a$.

COROLLARIUM 2

4. Ubi curva ad radium CM est normalis, ibi ob evanescens dx erit

$$b(a^2 - x^2) = ga^2(qx - na).$$

Quoties ergo est

$$q = \frac{a^2b + gna^3 - bx^2}{ga^2x},$$

erit curva in radium CM normalis. Quia autem q intra l
continetur, x non potest esse maior data quantitate; nam p
$q = \infty$, quod esset absurdum.

COROLLARIUM 3

285. Si CM est normalis in curvam, erit celeritas an

$$= \frac{\sqrt{v}}{MC} = \frac{\sqrt{(b + gna - gqx)}}{x},$$

quae aequalis esse debet ipsi $\frac{\sqrt{b}}{a}$. Maxima ergo est illa
si $q = -1$. Ille autem motus angularis eo fit minor, quo
vero minor porro erit motus angularis, quo magis obli
radium MC. Quare curva non ultra datam distantiam
poterit, quam distantiam dabit x ex hac aequatione

$$x\sqrt{b} = a\sqrt{(b + gna + gx)},$$

nempe

$$x = \frac{ga^2}{2b} + a\sqrt{\left(\frac{g^2a^3}{4b^2} + \frac{gna}{b} + 1\right)}.$$

Haec ergo est maxima curvae a puncto C distantia.

COROLLARIUM 4

286. Cum igitur curva non ultra datam distantiam
distare queat, curva haec erit in se rediens. Scilicet vel
tionem vel post duas vel post tres etc. vel etiam post in
in se redibit, prout litterae a, b, n et g fuerint assumtae.

EXEMPLUM

287. Si potentia sollicitans evanescit, fit $g = 0$ et c
promovebitur. Tum igitur pro curva descripta haec habel

$$\frac{dx}{\sqrt{(a^2 - x^2)}} = \frac{dt}{\sqrt{(1 - tt)}},$$

us integralis per logarithmos est

$$\sqrt{-1}\,l\left(\frac{x\sqrt{-1}-\sqrt{(a^2-x^2)}}{c}\right)=\sqrt{-1}\,l(t\sqrt{-1}-\sqrt{(1-tt)})$$

$$x\sqrt{-1}-\sqrt{(a^2-x^2)}=ct\sqrt{-1}-c\sqrt{(1-tt)}.$$

ae reducta dat

$$(a^2-c^2)^2=4(a^2+c^2)ctx-4c^2x^2-4a^2c^2t^2.$$

Incidat recta AC in verticalem CD; hoc enim perinde est ob evanescen
entiam g; debebit ergo fieri $x=a$ posito $t=0$, ex quo fit $a^2+c^2=0$ a

$$a^4=a^2x^2+a^4t^2 \quad \text{seu} \quad x^2=a^2(1-tt).$$

ae aequatio est pro circulo diametri a per punctum fixum C transeu
ando enim motus in circulo est aequabilis, motus quoque respectu cuiu
ncti in peripheria erit aequabilis.

SCHOLION

288. Perspicuum autem est hoc casu peripheriam circuli quoque s
ere, cuius centrum est in puncto fixo C, quippe quae solutio est facil
sua sponte se prodit. Quamobrem maxime mirandum est hunc casum
utione non contineri. Ratio vero huius similis prorsus est eius, q
ra § 268 dedimus, ubi simile paradoxum observavimus. Ad circu
trum in C habentem designandum prodire debuisset $x=a$ seu dx
od vero, quia x ut quantitas variabilis consideratur, non fieri potuit, p
tim cum in eadem aequatione solutio alia sit contenta, in qua x
ntitas revera variabilis. Ex prima vero aequatione posito $v=b$,
$Mn\cdot a=Mm\cdot x$, intelligi potest circulum satisfacere; nam si ubique
$=a$, erit quoque $Mn=Mm$. Magnum autem arbitror subsidium ad
uendas curvas huic problemati satisfacientes proditurum, si tali met
utio inveniri posset, quae sponte pro casu motus aequabilis circu
trum in C habentem esset datura. Cum enim casus simplicissimus it
olutus et abditus, ut elici vix queat, coniicere licet alias saepe cu
plices in generali quapiam solutione contineri, quae sint erutu
imae.

PROPOSITIO 32

PROBLEMA

289. *Si corpus attrahatur vi quacunque ad centrum viri*
venire curvam AM, super qua corpus data cum celeritate des
bili versus C feratur.

SOLUTIO

Sit corporis in A celeritas minima debita altitudini
tangens curvae in A, quia corpus in A directe ad C

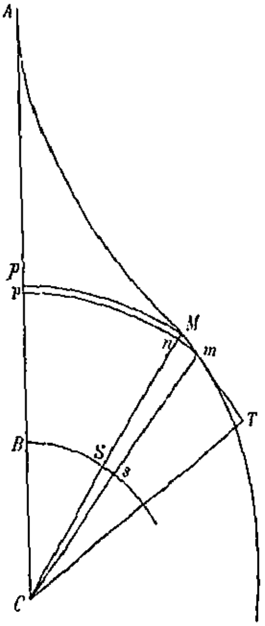


Fig. 37.

$AC = a$ et $CM = x$, celeritas in
v et vis centripeta in $M = P$;
quod integrale ita est accipiendu
evanescat fiatque $v = b$. Celeritas
esse debet, qua elementum Mm
absolvatur, quo elementum Pp
ergo $\sqrt{b} : \sqrt{v} = Pp : Mm = MT :$
ista aequatio

$$b \cdot MC^2 = v \cdot MT^2 = b \cdot MT^2 -$$

Dicatur perpendiculum CT in tan

$$bp^2 = -(x^2 - p^2)\int Pdx \quad \text{seu}$$

Vel si sinus ang. ACM ponatur

$$\frac{mn}{MC} = \frac{dt}{\sqrt{(1-tt)}}.$$

Unde sequens emergit aequatio

$$\frac{dt\sqrt{b}}{\sqrt{(1-tt)}} = \frac{-dx}{x}\sqrt{-\int Pdx}.$$

Quarum utraque, si quidem P per x datur, ad curvar
apta. Q. E. I.

COROLLARIUM 1

). Si vis centripeta potestati cuicunque distantiarum fuerit proportio-
empe

$$P = \frac{x^n}{f^n},$$

$$\int P dx = \frac{x^{n+1} - a^{n+1}}{(n+1)f^n}.$$

ostituto habebitur pro curva AM sequens aequatio

$$\frac{dt}{\sqrt{(1-tt)}} = \frac{-dx}{x}\sqrt{\frac{a^{n+1} - x^{n+1}}{(n+1)bf^n}}.$$

equatio ita debet integrari, ut facto $t = 0$ fiat $x = a$.

COROLLARIUM 2

1. Si $\int \frac{dt}{\sqrt{(1-tt)}}$ ita accipiatur, ut fiat $= 0$, si $t = 0$, prodibit ex illa
one integrata haec

$$\frac{dt}{1-tt)} = \frac{-2\sqrt{(a^{n+1} - x^{n+1})}}{(n+1)^{\frac{3}{2}}\sqrt{bf^n}} + \frac{a^{\frac{n+1}{2}}}{(n+1)^{\frac{3}{2}}\sqrt{bf^n}} l \frac{a^{\frac{n+1}{2}} + \sqrt{(a^{n+1} - x^{n+1})}}{a^{\frac{n+1}{2}} - \sqrt{(a^{n+1} - x^{n+1})}} = BS,$$

o C radio $BC = 1$ descriptus fuerit arcus circuli BSs. Ex quo patet
AM infinitos habere gyros, antequam corpus in C perveniat. Nam
$x = 0$ fit $BS = \infty$.

COROLLARIUM 3

2. Pendet igitur constructio huius curvae partim a quadratura circuli,
a logarithmis, si $n + 1$ est numerus affirmativus. At si $n + 1$ est
s negativus, is terminus, qui per logarithmos erat datus, ad quadra-
circuli quoque reducitur.

COROLLARIUM 4

3. Curva haec punctum habebit flexus contrarii, ubi est $dp = 0$. Ad
tur inveniendum sumatur aequatio

$$pp = \frac{-x^2\int Pdx}{b-\int Pdx},$$

ex qua differentiata positoque $dp = 0$ prodibit

$$bPx = 2\left(\int Pdx\right)^2 - 2b\int Pdx.$$

COROLLARIUM 5

294. In casu igitur, quo $P = \frac{x^n}{f^n}$, punctum flexus con

$$(n+1)^2 bf^n x^{n+1} = 2(a^{n+1} - x^{n+1})^2 + 2(n+1)bf^n(a$$

Unde haec oritur aequatio

$$\frac{a^{n+1} - x^{n+1}}{n+1} = -\frac{(n+3)bf^n}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{((n+3)^2 b^2 f^{2n} +$$

Quae in integrali substituta dabit angulum ACM, i flexus contrarii.

SCHOLION 1

295. Cum autem de natura huiusmodi curvarum d quicquam producere, ad casus speciales descendendum quod in sequentibus exemplis efficere visum est.

EXEMPLUM 1

296. Sit vis centripeta ipsis distantiis proportion $n = 1$. Posito ergo arcu $BS = s$ curva quaesita expri

$$s = -\frac{\sqrt{(a^2-x^2)}}{\sqrt{2bf}} + \frac{a}{2\sqrt{2bf}}\, l\, \frac{a+\sqrt{(a^2-}}{a-\sqrt{(a^2-}}$$

Ex qua aequatione data quavis puncti M a C dista BCS, quo absoluto corpus in ea distantia existit. Into vero et perpendiculum $CT = p$ aequatio haec erit

$$pp = \frac{a^2x^2 - x^4}{2bf + a^2 - x^2}.$$

rvae punctum flexus contrarii erit, ubi est $dp = 0$, hoc autem, ubi est

$$x^4 = 2a^2x^2 + 4bfx^2 - a^4 - 2a^2bf$$

$$xx = a^2 + 2bf - \sqrt{(2a^2bf + 4b^2f^2)},$$

on maior esse potest quam a. Hinc fit

$$x = \sqrt{\left(a^2 + 2bf - \sqrt{(2a^2bf + 4b^2f^2)}\right)}$$

$$\frac{pp}{xx} = \frac{\sqrt{(2a^2 + 4bf)} - 2\sqrt{bf}}{\sqrt{(2a^2 + 4bf)}}.$$

rgo, quem curva in puncto flexus contrarii constituit cum radio CM, rit

$$= \frac{\sqrt[4]{4bf}}{\sqrt[4]{(2a^2 + 4bf)}}.$$ [1]

vero curvae in seriem conversa erit posito $\sqrt{(a^2 - x^2)} = y$ haec

$$s\sqrt{2bf} = \frac{y^3}{3a^2} + \frac{y^5}{5a^4} + \frac{y^7}{7a^6} + \frac{y^9}{9a^8} + \text{ etc.}$$

rgo curvae principio, ubi x non multo minor est quam a seu y vum, erit

$$s\sqrt{2bf} = \frac{y^3}{3a^2}.$$

x ipsa aequatione apparet facto $x = 0$ fore $s = \infty$, quare curva infis ambit centrum C, eritque, quando corpus centro iam proximum est,

$$\frac{pp}{xx} = \frac{aa}{2bf + a^2}.$$

equitur proxime circa centrum C curvam abire in logarithmicam

1) ...litio princeps: $xx = a^2 + 2bf - 2\sqrt{(a^2bf + b^2f^2)}$, *quia x non maior esse potest quam a.* ... $= \sqrt{(a^2 + bf)} - \sqrt{bf}$, *atque* $\frac{pp}{xx} = \frac{\sqrt{(a^2 + bf)} - \sqrt{bf}}{\sqrt{(a^2 + bf)}}$. *Anguli ergo, quem curva in* ...*s contrarii constituit cum radio CM cosinus erit* $= \frac{\sqrt[4]{bf}}{\sqrt[4]{(a^2 + bf)}}$. Correxit P. St.

EXEMPLUM 2

297. Sit $n = -1$ seu $n + 1 = 0$, qui casus ex ipsa aeq
tiali est eruendus. Fit enim ob $P = \frac{f}{x}$

$$\int Pdx = fl\frac{x}{a},$$

unde habebitur ista aequatio

$$ds = \frac{dt}{\sqrt{(1-tt)}} = \frac{-dx}{x\sqrt{b}}\sqrt{fl\frac{a}{x}},$$

cuius integralis est

$$s = \frac{2f(la - lx)^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{bf}}.$$

Altera aequatio inter perpendiculum p et x erit haec

$$pp = \frac{fxxl\frac{a}{x}}{b + fl\frac{a}{x}}.$$

Ex qua invenitur punctum flexus contrarii in eo loco, in qu

$$b = 2f\left(l\frac{a}{x}\right)^2 + 2bl\frac{a}{x}$$

seu

$$l\frac{a}{x} = \frac{-b + \sqrt{(bb + 2bf)}}{2f}.$$

Hoc ergo habebitur sumendo

$$s = \frac{\left(-b + \sqrt{(bb + 2bf)}\right)^{\frac{3}{2}}}{3f\sqrt{2b}}.$$

Perspicitur porro, si fiat $x = 0$, fore $s = \infty$ seu curvam
centrum C circumdare; hoc vero casu erit $\frac{pp}{xx} = 1$ seu $p =$
curva in circulum infinite parvum abit.

EXEMPLUM 3

298. Ponatur $n = -2$, ut vis centripeta sit quadratis di
proco proportionalis; erit

$$\frac{dt}{\sqrt{(1-tt)}} = \frac{-fdx}{x}\sqrt{\frac{a-x}{abx}} = ds.$$

$$\frac{a-x}{x} = yy,$$

$$\frac{ds\sqrt{ab}}{2f} = \frac{yydy}{1+yy} = dy - \frac{dy}{1+yy}.$$

t vero $\int \frac{dy}{1+yy}$ arcum, cuius tangens est y seu $\sqrt{\frac{a-x}{x}}$; sit hic arcus t

$$t + \frac{s\sqrt{ab}}{2f} = y = \sqrt{\frac{a-x}{x}}.$$

ergo data distantia x capiendus est arcus s in $\frac{\sqrt{ab}}{2f}$ ductus aequalis iae inter tangentem $\sqrt{\frac{a-x}{x}}$ et arcum respondentem posito radio $=1$. natur $=0$, fiet $s=\infty$, ex quo sequitur curvam per infinitas spiras um C descendere. Praeterea ob

$$-\int Pdx = \frac{ff(a-x)}{ax}$$

$$pp = \frac{ffxx(a-x)}{abx+ff(a-x)}.$$

sequitur, si x evanescat, fore $\frac{pp}{xx}=1$ seu curvam ultimo quoque in infinite parvum abire.

uerit $ab=ff$, erit

$$pp = \frac{xx(a-x)}{a} \quad \text{et} \quad t + \frac{s}{2} = \sqrt{\frac{a-x}{x}}.$$

flexus contrarii hoc ergo casu incidet in eum locum, ubi est xx seu vel $x=0$ vel $x=\frac{2a}{3}$. Sin autem fuerit $ab=4ff$, erit

$$t+s=\sqrt{\frac{a-x}{x}}$$

um flexus contrarii habebitur capiendo [vel $x=0$ vel] $x=a\sqrt{\frac{1}{3}}$.

SCHOLION 2

Quo autem appareat, quomodo spirae infinitae sint comparatae, si ipeta fuerit potestati cuicunque distantiarum proportionalis seu

$$P = \frac{x^n}{f^n},$$

consideretur aequatio inter p et x, quae erit

$$\frac{pp}{xx} = \frac{a^{n+1} - x^{n+1}}{(n+1)bf^n + a^{n+1} - x^{n+1}}.$$

Ubi duo distinguendi sunt casus, alter, quo $n+1$ est num
alter, quo est negativus.

Si $n+1$ est numerus affirmativus, facto $x = 0$ fit

$$\frac{pp}{xx} = \frac{a^{n+1}}{(n+1)bf^n + a^{n+1}}.$$

Hoc ergo casu curva AM circa centrum C abit in logari

At si $n+1$ est numerus negativus, facto $x = 0$ fit

$$\frac{pp}{xx} = 1.$$

His ergo in casibus curva in C abit in circulum infi
his casibus corporis ad C accedentis celeritas infinite
rem, nisi curva in circulum abiret, corpus celeritate in
accederet, quod esset contra conditionem problematis.
curvis, super quibus corpus aequabiliter ad centrum viriu
gabimus eas curvas, super quibus motu aequabili circa c
cumfertur.

PROPOSITIO 33

PROBLEMA

300. *Si corpus attrahatur perpetuo ad centrum virium
determinare curvam AM, super qua corpus motu angulari circ
liter movetur.*

SOLUTIO

Sit A curvae punctum supremum, ubi curva normalis
sitque celeritas corporis in A debita altitudini b et AC=
gularis in $A = \frac{\sqrt{b}}{a}$, cui quantitati motus angularis in singu
esse aequalis. Ponatur $CM = x$, cui aequalis capiatur C

...a in $M = P$; erit celeritas in M debita altitudini $b - \int Pdx$ integrali $\int P...$ accepto, ut evanescat posito $x = a$. Ducta tangente MT vocetur perpe... ...ulum ex C in eam demissum $CT = p$; erit $p = Mm : mn$. Hanc ob rem celeritas per mn

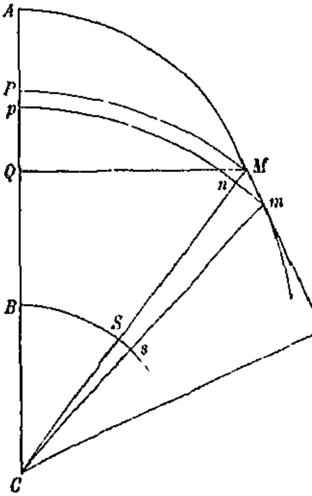


Fig. 38.

$$= \frac{p\sqrt{(b - \int Pdx)}}{x}$$

...celeritas angularis

$$= \frac{p\sqrt{(b - \int Pdx)}}{x^2},$$

...ae aequalis esse debet ipsi $\frac{\sqrt{b}}{a}$. Hinc prodit ...quens aequatio

$$bx^4 = a^2bp^2 - a^2p^2\int Pdx$$

...n

$$p = \frac{x^2\sqrt{b}}{a\sqrt{(b - \int Pdx)}}.$$

...ntro C radio $BC = 1$ describatur arcus circuli BS, qui dicatur $= s$, e... $ds = x : mn$, unde erit $mn = xds$ et $Mm = \sqrt{(dx^2 + x^2ds^2)}$. Cum nunc ... $: p = \sqrt{(dx^2 + x^2ds^2)} : xds$, fiet

$$p = \frac{xxds}{\sqrt{(dx^2 + x^2ds^2)}}.$$

...o valore in aequatione inventa substituto habebitur

$$bdx^2 + bx^2ds^2 = a^2bds^2 - a^2ds^2\int Pdx$$

...ncque

$$ds = \frac{-dx\sqrt{b}}{\sqrt{(a^2b - bx^2 - a^2\int Pdx)}}.$$

...x qua aequatione curva quaesita poterit construi. Q. E. I.

COROLLARIUM 1

301. Quo minor fit x, eo maior fiet $b - \int Pdx$, quare, quo minor fi... ...o minor quoque fiet $\frac{p}{x}$ seu sinus anguli CMT. Est enim $\frac{p}{x} = \frac{x\sqrt{b}}{a\sqrt{(b - \int P...}}$

COROLLARIUM 2

302. Porro tam ex hypothesi quam hac aequatione
maior quam a; fieret enim $p > x$. Quamobrem radiorum
esse normalis in curvam, nisi qui est maximus, nempo =

SCHOLION 1

303. Per se quidem manifestum est in quacunque v
thesi circulum centro C descriptum satisfacere; corpus
uniformiter moveri debebit. Etiamsi autem aequatio ge
comprehendere videatur, nihilo tamen minus in ea conte
iam supra innuimus.

SCHOLION 2

304. Perspicuum autem est nullam aliam curvam c
praeter circulum quaesito satisfacere posse. Nam in h
non potest, ut omnes rectae ex C eductae et in curvam
se aequales. Quae igitur curvae praeter circulum proble
ipsum centrum C transire debent, ut plus uno radio MC
normali. Cuiusmodi ergo sint hae curvae, in sequente e

EXEMPLUM

305. Sit vis centripeta distantiis a centro directe
$P = \frac{x}{f}$; erit

$$-\int P dx = \frac{a^2 - x^2}{2f}.$$

Quo substituto pro curva sequens prodit aequatio

$$ds = \frac{-dx\sqrt{b}}{\sqrt{\left(b + \frac{a^2}{2f}\right)(a^2 - x^2)}}.$$

Est vero $\int \frac{dx}{\sqrt{(a^2 - x^2)}}$ arcus, cuius sinus est $\frac{x}{a}$ existente tot
hic arcus per $A.\frac{x}{a}$. Sit sinus arcus $BS = t$, erit $s = A$

$$A.\, t = \sqrt{\frac{2bf}{a^2 + 2bf}} \left(A.\, 1 - A.\frac{x}{a}\right).$$

us, cuius cosinus est $\frac{x}{a}$, erit

$$= A.t\sqrt{\frac{a^2+2bf}{2bf}}.$$

onstructio curvae facilis fluit eritque curva algebraica, quoties $\sqrt{\frac{a^2+2bf}{2bf}}$ ierus rationalis. Sit

$$\sqrt{\frac{a^2+2bf}{2bf}} = m \quad \text{seu} \quad 2bf = \frac{a^2}{m^2-1},$$

$$\frac{mdt}{\sqrt{(1-tt)}} = \frac{-dx}{\sqrt{(a^2-x^2)}},$$

tegralis per logarithmos imaginarios est

$$ml(t\sqrt{-1}+\sqrt{(1-tt)}) = l\left(\frac{x+\sqrt{(x^2-a^2)}}{a}\right)$$

$$(t\sqrt{-1}+\sqrt{(1-tt)})^m = \frac{x+\sqrt{(x^2-a^2)}}{a}.$$

tur ex M in AC perpendiculum $MQ = y$ et posito $CQ = u$ erit $:y$ atque $t = \frac{y}{x}$. Propterea prodibit

$$\left(\frac{y\sqrt{-1}+\sqrt{(x^2-y^2)}}{x}\right)^m = \frac{x+\sqrt{(x^2-a^2)}}{a}.$$

$n = 2$ seu $bf = \frac{a^2}{6}$, habebitur ista aequatio

$$\left(\frac{y\sqrt{-1}+u}{x}\right)^2 = \frac{x+\sqrt{(x^2-a^2)}}{a}.$$

educta dat hanc

$$x^3 = au^2 - ay^2 = ax^2 - 2ay^2$$

$$y = x\sqrt{\frac{a-x}{2a}} \quad \text{et} \quad u = x\sqrt{\frac{a+x}{2a}}.$$

inter coordinatas orthogonales u et y aequatio desideretur, ea erit sexti haec

$$(y^2+u^2)^3 = a^2(u^2-y^2)^2.$$

In hac curva applicata erit maxima, si $x = \frac{2b}{3}$ seu si sun

$$CQ = \frac{2}{3} a \sqrt{\frac{5}{6}} = a \sqrt{\frac{10}{27}};$$

tum enim erit

$$QM = \frac{2}{3} a \sqrt{\frac{2}{27}}.$$

In aliis vero ipsius m valoribus maxima applicata erit, ub

$$my\sqrt{(a^2 - x^2)} = ux.$$

PROPOSITIO 34

PROBLEMA

306. *Sit potentia sollicitans uniformis g et ubique deors curva AT* (Fig. 39); *invenire curvam AM, super qua corpu tempus per arcum quemcunque AM proportionale sit radici qu respondente PT curvae datae AT.*

SOLUTIO

Ponatur abscissa communis $AP = x$, curvae AT applica ergo, quia curva AT datur, aequatio inter x et t, quae ta evanescente x fiat quoque initium in A ponitur et to computantur. Sit porro cu applicata $PM = y$ et arcu sit celeritas initialis in A ergo celeritas in M debita et tempus, quo arcus AM

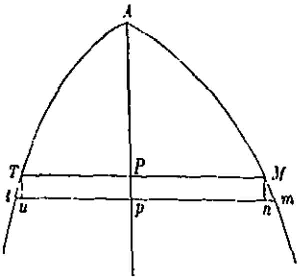


Fig. 39.

$$= \int \frac{ds}{\sqrt{(b + g}}$$

quod aequale esse debet ipsi $\sqrt{t}$. Habebitur ergo haec ae

$$\int \frac{ds}{\sqrt{(b + gx)}} = \sqrt{t} \quad \text{seu} \quad \frac{ds}{\sqrt{(b + gx)}} = \frac{dt}{2\sqrt{t}}$$

$$dt^2(b+gx) = 4tds^2 = 4tdx^2 + 4tdy^2$$

$$dy = \frac{\sqrt{(bdt^2 + gxdt^2 - 4tdx^2)}}{2\sqrt{t}}.$$

a aequatione, cum t per x detur, curva quaesita AM construi poterit.
tem est construenda, ut posito $x=0$ fiat quoque $y=0$, quo curvae
nitium sit in A. Q. E. I.

COROLLARIUM 1

07. Quo igitur curva sit realis, oportet, ut $bdt^2 + gxdt^2$ sit maius quam
seu

$$\frac{dt}{2\sqrt{t}} > \frac{dx}{\sqrt{(b+gx)}} \quad \text{sive integrando} \quad \sqrt{t} > \frac{2\sqrt{(b+gx)} - 2\sqrt{b}}{g}.$$

m fuerit

$$\sqrt{t} = \frac{2\sqrt{(b+gx)} - 2\sqrt{b}}{g},$$

AM fit recta verticalis, super qua descensus fit celerrimus.

COROLLARIUM 2

08. Si igitur in curva AT alicubi fiat $\frac{dt}{2\sqrt{t}}$ aequale ipsi $\frac{dx}{\sqrt{(b+gx)}}$, ibi
s curvae AM respondens erit verticalis. Atque si infra hunc locum sit
$\frac{dx}{\sqrt{(b+gx)}}$ curva AM non eousque descendet, sed habebit punctum
ionis in eo loco, ubi tangens est verticalis.

COROLLARIUM 3

09. Si angulus, quem curva AT in A cum verticali AP constituit,
acutus, cuius tangens $= m$, erit in initio A

$$t = mx \quad \text{et} \quad \frac{dt}{2\sqrt{t}} = \frac{mdx}{2\sqrt{mx}} > \frac{dx}{\sqrt{(b+gx)}},$$

unde $m(b+gx)$ maius esse debet quam $4x$, id quod semper
fuerit $=0$. Tum autem erit

$$dy = \frac{dx\sqrt{(bm^2+gm^2x-4mx)}}{2\sqrt{mx}}.$$

Posito igitur $x=0$ fiet $\frac{dy}{dx}=\infty$, seu his casibus curvae
erit horizontalis, nisi sit $b=0$. At si $b=0$, erit

$$dy = \frac{dx\sqrt{(gm-4)}}{2}.$$

Ne igitur curva AM fiat imaginaria, debet gm maius es
tum curva AM cum AP in A angulum acutum constituet,

$$\frac{\sqrt{(gm-4)}}{2}.$$

COROLLARIUM 4

310. Sin vero angulus, quem curva AT in A cum
sit rectus, fit $m=\infty$. Hoc ergo casu curvae AM tangens
horizontalis, sive b fit $=0$ sive secus.

COROLLARIUM 5

311. Si celeritas in A est $=0$ et in principio A curv
cum curva, cuius aequatio est $t=\alpha x^n$ existente n numer
crescente x quoque t crescat, erit

$$dt = \alpha n x^{n-1}dx \quad \text{et} \quad dy = \frac{dx\sqrt{(\alpha^2 g n^2 x^{2n-1} - 4\alpha}}{2\sqrt{\alpha x^n}}$$

Nunc ne dy fiat imaginarium facto $x=0$, debebit esse $n >$
quibus casibus scilicet curva AT in A est normalis ad AI
in puncto A

$$dy = \frac{n\,dx\sqrt{\alpha g}}{2x^{\frac{1-n}{2}}} \quad \text{et} \quad y = \frac{nx^{\frac{n+1}{2}}\sqrt{\alpha g}}{n+1}$$

et radius osculi curvae AM in A

$$= \frac{n^2\alpha g x^n}{2(n-1)}.$$

Ex quo sequitur curvae AM, cuius tangens in A est horizontalis, r
osculi in A debere esse infinite parvum, si corpus ex quiete super
scendere posse debeat. Nisi enim radius osculi fuerit infinite parvus,
perpetuo in A quiescens permanebit.

COROLLARIUM 6

312. Si igitur corpus ex quiete descendere ponatur in A, quo curv
fiat realis, debebit $\frac{dt}{2\sqrt{t}}$ maius esse quam $\frac{dx}{\sqrt{gx}}$, saltem in initio curva
Quare si ponatur

$$\frac{dt}{2\sqrt{t}} = \frac{dx}{\sqrt{gx}} + pdx,$$

ubi p est quantitas affirmativa, saltem nisi x ponatur nimis magnun

$$\sqrt{t} = \frac{2\sqrt{gx}}{g} + \int pdx,$$

ubi $\int pdx$ ita accipi debet, ut evanescat facto $x = 0$. Hoc autem valor
$\frac{dt}{2\sqrt{t}}$ substituto prodibit

$$\frac{ds}{\sqrt{gx}} = \frac{dx}{\sqrt{gx}} + pdx \quad \text{seu} \quad s = x + \int pdx\sqrt{gx}$$

pro curva quaesita AM. Vel inter x et y haec habebitur aequatio

$$y = \int dx\sqrt{(2p\sqrt{gx} + gppx)}.$$

Notandum vero est p non talem esse posse quantitatem, ex qua $\int pd$
scripto modo acceptum fiat infinite magnum.

COROLLARIUM 7

313. Ex dictis intelligitur, quamdiu p valorem affirmativum r
tamdiu curvam AM descendere; si fit $p = 0$ et deinceps negativum, cur
in illo loco habebit cuspidem et revertetur sursum. Si $p = \infty$ manente
$\int pdx$ finito, curva AM ibi habebit tangentem horizontalem.

COROLLARIUM 8

314. Si b non ponatur $= 0$, ex eadem curva AT innumerab
poterunt curvae AM; prout enim celeritas initialis maior minorve
alia prodit curva AM.

SCHOLION

315. Problematis huius maximus erit usus in solutionibus
problematum indeterminatorum, in quibus omnes curvae requiru
quibus corpus eodem tempore vel ad datam rectam vel curvam
veniat. Hanc ob rem indolem quantitatum t et p diligentius inv
quo iis in sequentibus uti liceat.

PROPOSITIO 35

PROBLEMA

316. *Posita potentia sollicitante uniformi g et deorsum directa in*
curvas AMC (Fig. 40), *super quibus corpus in A ex quiete descens*
dato tempore ad rectam horizontalem BC perveniat.

SOLUTIO

Ponatur $AP = x$, $PM = y$ et $AB = a$. In curva AND e
supra sumtam quantitatem $\int pdx$, cuius curvae haec debet esse
ut in A cum axe AB concurrat ein
catae continuo usque ad D saltem c
scilicet pdx sit affirmativum. Nunc

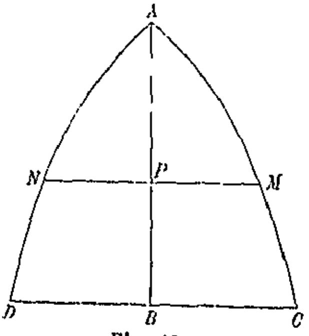


Fig. 40.

$$y = \int dx\sqrt{(2p\sqrt{gx} + gp}$$

erit tempus per AMC

$$= \frac{2\sqrt{ga}}{g} + BD$$

(§ 312). Quamobrem cum infinitae curvae huius indolis in locum c
substitui queant, ex iis infinitae oriuntur curvae AMC, super qui

debebit esse $2\alpha x + \frac{\sqrt{b}}{a} - \alpha a$ affirmativum. Quare oportet ess
ponatur ideo $\sqrt{b} = \alpha a^2 + \alpha a f$, erit $\alpha = \frac{\sqrt{b}}{a^2 + af}$. Quo substituto h

$$z = \frac{x^2\sqrt{b} + fx\sqrt{b}}{a^2 + af},$$

quae aequatio substituendis loco f innumerabilibus valoribus affi
finitas dat curvas AND. Fiet autem

$$p = \frac{dz}{dx} = \frac{2x\sqrt{b} + f\sqrt{b}}{a^2 + af} \quad \text{et} \quad p\sqrt{gx} = \frac{2x\sqrt{gbx} + f\sqrt{gbx}}{a^2 + af},$$

ex qua patet omnes hinc orientes curvas AMC tangere rectam
Aequatio vero pro curvis AMC erit haec

$$y = \int \frac{dx}{a^2 + af} \sqrt{\left(2a(a+f)(2x+f)\sqrt{gbx} + gbx(2x+f)^2\right)}.$$

Quae infinitas continet curvas problemati satisfacientes, super quil
tempus descensus ad lineam horizontalem est $= \frac{2\sqrt{ga}}{g} + \sqrt{b}$.

COROLLARIUM 3

321. Hae autem lineae omnes sunt rectificabiles. Nam cum

$$\frac{ds}{\sqrt{gx}} = \frac{dx}{\sqrt{gx}} + p\,dx,$$

erit

$$s = x + \int p\,dx\sqrt{gx}.$$

Est vero

$$\int p\,dx\sqrt{gx} = \frac{\frac{4}{5}x^2\sqrt{gbx} + \frac{2}{3}fx\sqrt{gbx}}{a^2 + af}.$$

Unde tota curva AMC erit

$$= a + \frac{\left(\frac{4}{5}a + \frac{2}{3}f\right)\sqrt{gab}}{a+f}.$$

COROLLARIUM 4

2. Inter has igitur curvas AMC longissima prodit, si $f=0$; erit um

$$AMC = a + \frac{4}{5}\sqrt{gab}.$$

hac erit aequatio ista

$$y = \int \frac{2\,dx}{a^2}\sqrt{\left(a^2x\sqrt{gbx} + gbx^2\right)}.$$

ma vero habetur facto $f=\infty$; tum enim erit

$$AMC = a + \frac{2}{3}\sqrt{gab}.$$

atio pro hac curva erit

$$y = \int \frac{dx}{a}\sqrt{\left(2a\sqrt{gbx} + gbx\right)}.$$

SCHOLION 2

3. Omnes curvae AND sub aequatione

$$z = \frac{x^2\sqrt{b} + fx\sqrt{b}}{a^2 + af}$$

ae sunt parabolae, adeo ut per solas parabolas innumerabiles inventae rvae problemati satisfacientes. Neque vero omnes parabolae in hac one continentur, sed loco illius aequationis si adhibeatur haec

$$z^2 + z\sqrt{f} = \frac{x\left(b + \sqrt{bf}\right)}{a},$$

iam infinitas parabolas continet, iterum infinitae curvae AMC inve-, super quibus corpus dato tempore descensum absolvit. Ex quo potest, quoties infinitae inveniri queant curvae AMC, si tantum s conicae in locum curvae AND substituantur. Sumta enim pro AND hac aequatione

$$z^2 + \alpha z = \beta x^2 + \gamma x + \delta xz,$$

quae omnes continet sectiones conicas per punctum A transe

$$b + a\sqrt{b} = \beta a^2 + \gamma a + \delta a\sqrt{b}$$

atque

$$\frac{\gamma}{\alpha} \quad \text{et} \quad \frac{2\beta a + \gamma + \delta\sqrt{b}}{a + 2\sqrt{b} - \delta a}$$

debent esse quantitates positivae; quod quam infinitis mo
facile perspicitur. Si deinde omnes curvae algebraicae con
postmodum quoque curvae transcendentes simul, maxima
simul descriptarum concipi poterit.

EXEMPLUM 2

324. Sumatur pro curva AND haec aequatio generalis

$$z = \frac{x^n\sqrt{b}}{a^n}$$

denotante n numerum affirmativum quemcumque; evanescet
fietque $z = \sqrt{b}$ posito $x = a$, ut requiritur; praeterea vero q

$$\frac{dz}{dx} = \frac{nx^{n-1}\sqrt{b}}{a^n}$$

quantitas affirmativa. Cum igitur sit

$$p\sqrt{gx} = \frac{nx^{n-\frac{1}{2}}\sqrt{gb}}{a^n},$$

erit

$$y = \int \frac{dx}{a^n}\sqrt{\left(2na^nx^{n-\frac{1}{2}}\sqrt{gb} + n^2gbx^{2n-1}\right)}.$$

Quae aequatio infinitas curvas AMC complectitur, quae om
ficabiles. Erit enim

$$AM = x + \frac{2nx^{n+\frac{1}{2}}\sqrt{gb}}{(2n+1)a^n}$$

ideoque

$$AMC = a + \frac{2n\sqrt{gab}}{2n+1}.$$

COROLLARIUM 5

fuerit $n = \frac{1}{2}$, erit

$$y = \int \frac{dx\sqrt{(gb + 4\sqrt{gab})}}{2\sqrt{a}} \quad \text{atque} \quad y = \frac{x\sqrt{(gb + 4\sqrt{gab})}}{2\sqrt{a}}$$

$$AM = x\left(1 + \frac{\sqrt{gab}}{2a}\right).$$

abit in lineam rectam inclinatam, super qua descensus fit tem- $+ \sqrt{b}$. Perspicitur ergo dari lineas breviores recta hac inclinata, s corpus dato tempore ex A ad horizontalem BC pervenit; facto linea AMC fit brevior.

SCHOLION 3

eterum si detur unica curva AND desideratam curvam AMC ex ea ipsa innumerabiles aliae poterunt inveniri. Data enim unica inter z et x capiatur

$$PN = \frac{(ma - (m-1)x)z}{a},$$

diverso ipsius m valore innumerabiles curvae orientur. Simili etiam potest

$$PN = \frac{(max^n - (m-1)x^{n+1})z}{a^{n+1}};$$

$N = z = \sqrt{b}$, si ponatur $x = a$. Atque generaliter, si fuerit P ecunque ipsarum x et z, A vero eadem functio, quae prodit facto $= \sqrt{b}$, accipi poterit

$$PN = \frac{Pz}{A}.$$

em P talis esse functio, ut Pz evanescat facto $x = 0$ et $z = 0$, et visum per dx debet esse quantitas affirmativa, saltem quamdiu est

SCHOLION 4

327. Simili modo problema generalissime solvetur, si d… cunque functionem ipsius x evanescentem, si est $x = 0$, … tatem, in quam abit P, si fit $x = a$, sumatur

$$z = \frac{P\sqrt{b}}{A}$$

pro generalissima aequatione curvae AND. Sit deinde dP… esse quantitas affirmativa, quamdiu x non superat a; erit p …

$$y = \int \frac{dx}{A} \sqrt{(2AQ\sqrt{gbx} + gbQQx)},$$

quae est generalissima aequatio pro curvis AMC, quae … descendente proposito tempore absolventur. Apparet hoc … scendentes quoque in locum curvarum AND substitui poss… tempus, quo quaevis curvae AMC portio absolvitur, alg… definiri. Si $Q\sqrt{gbx}$ ponatur $= R$, erit

$$y = \int \frac{dx}{A} \sqrt{(2AR + RR)}.$$

Sumta ergo loco R quacunque functione ipsius x ad inv… grari debet $\frac{Rdx}{\sqrt{gbx}}$, ita ut evanescat posito $x = 0$; deinde p… et quod provenit, erit $= A$. Hic vero hoc tantum est m… sumatur quantitas affirmativa, quamdiu x non excedit a, … $\int \frac{Rdx}{\sqrt{gbx}}$ fiat infinitum, si praescripto modo accipiatur.

PROPOSITIO 36

PROBLEMA

328. *Posita potentia sollicitante uniformi g et ubique de… nire omnes curvas AMC* (Fig. 41, p. 139), *super quibus corp… pore ad rectam BC ad horizontem utcunque inclinatam descen…*

SOLUTIO

Exprimat curvae AND applicata BD tempus, quo … rectam BC pertingit, et ducta per quodvis punctum M …

atae BC secante verticalem AB in Q exprimat applicata QN tempus
rpus partem AM percurrit. Quare si infinitae curvae AND con
r, quae omnes in B eandem
applicatam BD, hae omnes
unt curvas AMC, super quibus
dato tempore ab A ad rectam
rvenit. Curvae autem AND, ut
monitum, concurrere debent in A
rticali AB et usque ad D diver-
bent ab AB. Ponatur nunc tan-
guli $ABC = k$ sitque $AP = x$,
y, $AQ = u$, $QN = t$ et $AB = a$;
$Q = \frac{y}{k}$ ideoque

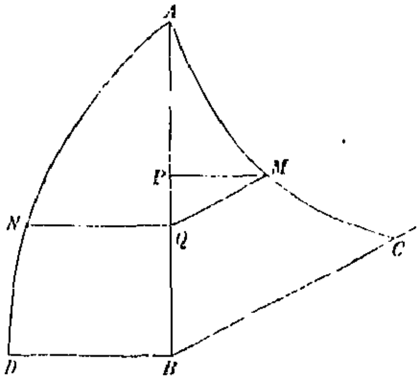


Fig. 41.

$$x + \frac{y}{k} = u.$$

tem celeritas in M debita est altitudini gx, erit tempus per AM

$$= \int \frac{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{\sqrt{gx}},$$

equale esse debet ipsi $QN = t$; erit adeo

$$dt = \frac{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{\sqrt{gx}} \quad \text{et} \quad gxdt^2 = dx^2 + dy^2.$$

curvam AND datam dabitur t in u, et cum sit $u = x + \frac{y}{k}$, dabitur
t y; quamobrem habebitur aequatio inter x et y pro curva quaesit
Vel cum sit $y = ku - kx$, erit

$$gxdt^2 = (k^2 + 1)dx^2 - 2k^2dudx + k^2du^2,$$

aequatione x per u invenire licebit. Sit ad hoc $dt = pdu$, erit

$$gxp^2du^2 = (k^2 + 1)dx^2 - 2k^2dudx + k^2du^2$$

$$dx = \frac{k^2du \pm \sqrt{((g(k^2 + 1)p^2x - k^2)du^2)}}{k^2 + 1}.$$

gitur AND talis accipi debet, ut ubique p maius sit quam

$$\frac{k}{\sqrt{gx(k^2 + 1)}}.$$

Aequatio illa autem ita debet integrari, ut facto $u = 0$ fia
quoque eruatur aequatio inter x et y pro curva quaesita.

COROLLARIUM 1

329. Curva AMC tangit in A rectam AB, si fit dy
tum vero debebit esse $du = dx$ atque $1 = \sqrt{(g(k^2+1)p^2}$
eveniet, si fit $ppx = \frac{1}{g}$ facto $x = 0$. Quia autem hoc c
minor quam x, erit in ipso initio $x = u$; ex quo sequ
in A tangere verticalem AB, si fuerit $ppu = \frac{1}{g}$ posito u

COROLLARIUM 2

330. Deinde curva AMC normalis erit in QM, si fu
seu $dx = kdy = k^2du - k^2dx$ sive $dx = \frac{k^2du}{k^2+1}$. Hoc vero

$$p^2x = \frac{kk}{g(k^2+1)}.$$

COROLLARIUM 3

331. In ipso puncto A expressio ppx vel finitam
maiorem quam $\frac{kk}{g(k^2+1)}$ habebit facto $x = 0$ vel infinite mag
casu erit $dx = \pm\infty du$, et cum sit $du = dx + \frac{dy}{k}$, erit dy
casibus tangens curvae AMC in A parallela erit rectae I

EXEMPLUM

332. Sit curva AND parabola quaecunque, ita ut sit

$$t = \frac{2\alpha\sqrt{u}}{\sqrt{g}};$$

erit

$$dt = \frac{\alpha du}{\sqrt{gu}} \quad \text{et} \quad p = \frac{\alpha}{\sqrt{gu}},$$

unde habebitur ista aequatio

$$(k^2+1)dx - k^2du = \pm \frac{du\sqrt{(\alpha^2(k^2+1)x - k^2}}{\sqrt{u}}$$

quationis integralis est

$$\pm\sqrt{(\alpha^2(k^2+1)x-k^2u)}+A\sqrt{u})^{\pi}\left(\pm\sqrt{(\alpha^2(k^2+1)x-k^2u)}+B\sqrt{u}\right)^{\varrho}$$

$$A=\frac{\alpha^2+\sqrt{(\alpha^4-4(1-\alpha^2)k^2)}}{2}\quad \text{et}\quad B=\frac{\alpha^2-\sqrt{(\alpha^4-4(1-\alpha^2)k^2)}}{2}$$

$$\pi=\frac{-2A}{A-B}\quad \text{atque}\quad \varrho=\frac{2B}{A-B}.$$

st $\alpha<1$, fit B et hinc quoque ϱ numerus positivus.] Cum igitur
nerus negativus, erit

$$\sqrt{(\alpha^2(k^2+1)x-k^2u)}+A\sqrt{u})^{-\pi}=\left(\pm\sqrt{(\alpha^2(k^2+1)x-k^2u)}+B\sqrt{u}\right)^{\varrho},$$

notat constantem, quae efficiat, ut posito $x=0$ fiat $u=0$. Mani-
atem est, quaecunque fuerit constans, semper fieri $u=0$ posito
xcepto casu, quo ϱ vel π evanescit. At π evanescere non potest,
anescit casu, quo $\alpha=1$; hoc igitur casu debet esse $C=\infty$ fietque

$$\pm\sqrt{(\alpha^2(k^2+1)x-k^2u)}+\alpha^2\sqrt{u}=0$$

et $y=0$; quare satisfacit hoc casu recta verticalis AB. Reliquis
ero ob C arbitrariam quantitatem ex unica curva AND innumera-
ae AMC inveniuntur.

us porro casus est seorsim tractandus, si $A=B$ seu

$$k^2=\frac{\alpha^4}{4(1-\alpha^2)};$$

erit

$$lu=C-2l\left(r\mp\frac{\alpha^2}{2}\right)\pm\frac{\alpha^2}{r\mp\frac{\alpha^2}{2}}$$

$$r=\frac{\sqrt{(\alpha^2(k^2+1)x-k^2u)}}{\sqrt{u}}.$$

ter pro hoc casu habebitur haec aequatio

$$=2l\left(\sqrt{(\alpha^2(k^2+1)x-k^2u)}\mp\frac{\alpha^2\sqrt{u}}{2}\right)\mp\frac{\alpha^2\sqrt{u}}{\sqrt{(\alpha^2(k^2+1)x-k^2u)}\mp\frac{\alpha^2\sqrt{u}}{2}},$$

oque determinatione non opus habet.

Si est $\alpha > 1$, fit B et hinc quoque ϱ numerus negativus: esse $C = \infty$. Hoc ergo casu erit vel

$$A\sqrt{u} = \sqrt{(\alpha^2(k^2+1)x - k^2u)}$$

vel

$$B\sqrt{u} = \sqrt{(\alpha^2(k^2+1)x - k^2u)}.$$

Quae duae aequationes sunt pro lineis rectis certo modo incl transeuntibus haeque etiam generaliter satisfaciunt. Ut si fu $A = 1$ et $B = 0$ hincque hae aequationes

$$u = x \quad \text{seu} \quad y = 0 \quad \text{et} \quad u = \frac{(k^2+1)x}{kk} \quad x + \frac{y}{k} \quad \text{non}$$

quae est linea recta perpendicularis in BC; haec enim a corp pore percurritur quo verticalis AB.

COROLLARIUM 4

332[a][1]. Nisi igitur sit $\alpha = 1$ vel $\alpha > 1$, innumerabiles l veniuntur problemati satisfacientes; quae ergo omnes minore ventur quam perpendicularis AB.

COROLLARIUM 5

333. Cum ergo ex unica curva AND infinitae oriri quea facile intelligitur infinities plures curvas huic quaestioni praecedenti.

COROLLARIUM 6

334. Si $\alpha < 1$, effici potest determinanda constante C, per datum punctum rectae BC transeat. Deinde aliis as AND simili modo infinitae curvae poterunt inveniri, sup non solum dato tempore ad rectam BC perveniat, sed a punctum datum C.

SCHOLION 1

335. In hoc exemplo casus, quo $\alpha = 1$, bis occurrit; linea recta verticalis tantum satisfaciens est inventa, alt

1) Editio princeps falso pro numero 333 iterat numerum 332. P.

c rectam alia inclinata, utroque tamen modo eadem aequatione gen
nus usi. Saepius autem iam huiusmodi casus obtigerunt, in quibus ae
nes differentiales continent in se aequationes integrales, quae nihilom
integrationes non eruuntur. Ut in casu $\alpha = 1$ haec habetur aequ
erentialis

$$\frac{(k^2+1)dx - k^2du}{\sqrt{((k^2+1)x - k^2u)}} = \frac{\pm du}{\sqrt{u}},$$

e integrata dat $x = u$. Interim tamen perspicuum est hanc aequatio
$= (k^2+1)x$ in illa quoque contineri, etiamsi per integrationem non
t. Et hanc ob rem posterior aequatio integralis aeque satisfacit ac p
$= u$. Hinc generaliter colligere licet aequationem differentialem

$$\frac{dt}{T} = Vdu,$$

qua T est talis functio ipsius t, quae evanescat posito $t = 0$, et V fu
ecunque ipsius u, aeque comprehendere hanc integralem $t = 0$ ac ha

$$\int\frac{dt}{T} = \int Vdu,$$

ie per integrationem elicitur. Plerumque quidem casus $t = 0$, si
plex quantitas, negligi potest; at si t est quantitas composita
stro casu, perperam omittitur. Similem casum supra habuimus § 30
uatione

$$ds = \frac{-dx\sqrt{b}}{\sqrt{(a^2b - bx^2 - a^2\int Pdx)}},$$

observavimus aequationem $x = a$ in ea contineri, etiamsi integ
quidem possit perfici. Nam posito $a - x = t$ erit $-dx = dt$ et

$$\sqrt{(a^2b - bx^2 - a^2\int Pdx)}$$

t functio ipsius t, quae fit $= 0$, si fit $t = 0$ seu $x = a$; namque $\int Pd$
cipi iubebatur, ut evanescat posito $x = a$. Posita ergo hac ipsius t
ne $= T$ erit

$$ds = \frac{dt\sqrt{b}}{T},$$

ex qua aequatione ergo tuto concludi licet satisfacere aeq
$x = a$ ideoque problemati illi satisfacere circulum, ut ibi
Magis universaliter vero in hac aequatione $Vdu = \frac{dt}{T}$, s
posito $t = 0$, comprehendetur ista aequatio $T = 0$, ex
stanti quantitati ideoque $dt = 0$. Unde intelligitur $T = 0$
tione proposita $Vdu = \frac{dt}{T}$. Atque hinc, si t fuerit quanti
ex u et x, statim habetur aequatio integralis per integral

SCHOLION 2

336. Casus hic superest, qui peculiarem resolutionem
recta BC supra punctum A cum BA concurrit et qu
Considerabimus autem sequente problemate tantum ca
parallela verticali AB et in data distantia posita; ex quo
rectae BC utcunque inclinatae deducere licebit.

PROPOSITIO 37

PROBLEMA

337. *Sollicitetur corpus perpetuo deorsum vi uniformi* g;
numerabiles, super quibus corpus ex A (Fig. 42) *motum a* q
tempore ad rectam verticalem EC *perveniat.*

SOLUTIO

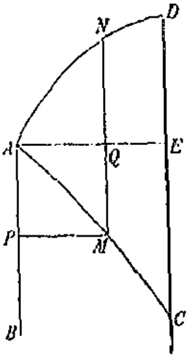


Fig. 42.

Sit AMC curva quaecunque q
axe sumatur recta verticalis AB;
$PM = AQ = y$; erit celeritas in M
et tempus per AM

$$= \int \frac{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{\sqrt{gx}}.$$

Sit porro AND curva, cuius quaevis
primat tempus per AM, et sit $QN =$
poterit ex curva AND data curva A
si infinitae curvae AND concipiu

E communem habeant applicatam DE, omnes producent curvas A
per quibus corpus dato tempore per DE expresso ex A ad CE perve
it itaque

$$t=\int\frac{\sqrt{(dx^2+dy^2)}}{\sqrt{gx}}$$

posito $dt=pdy$ erit

$$gp^2xdy^2=dx^2+dy^2 \quad \text{atque} \quad dx=dy\sqrt{(gp^2x-1)}.$$

ac ita integrata, ut posito $x=0$ fiat $y=0$, dabit curvas AMC quae
R functio quaecunque ipsius y et $\int Rdy$ ita capiatur, ut evan
sito $y=0$. Tum fiat $\int Rdy=A$ posito $y=AE=a$ et exist
$E=\sqrt{b}$ sumatur

$$t=\frac{\sqrt{b}\int Rdy}{A};$$

t

$$p=\frac{R\sqrt{b}}{A} \quad \text{atque} \quad dx=\frac{dy}{A}\sqrt{(gbR^2x-A^2)}.$$

ae aequatio, quicquid pro R substituatur, dabit innumeras curvas qua
isfacientes. Q. E. I.

COROLLARIUM 1

338. Casus ergo habetur simplicissimus, si fuerit $R=1$; tum
quatio separabilis prodit. Erit vero $t=\frac{y\sqrt{b}}{a}$ ob $A=a$. Hanc ob rem

$$\frac{adx}{\sqrt{(gbx-a^2)}}=dy \quad \text{atque} \quad \frac{2a}{gb}\sqrt{(gbx-a^2)}=y.$$

i autem nullius est utilitatis ob valorem ipsius y imaginarium.

COROLLARIUM 2

339. Quia autem $\sqrt{(gbR^2x-A^2)}$ non potest esse quantitas imagin
ortet sit $R^2x>\frac{A^2}{gb}$, etiamsi $x=0$. Quare R neque quantitas constans
test neque functio ipsius y, quae evanescat facto $y=0$. Hanc ob re
is esse debet functio ipsius y, quae fiat $=\infty$, si ponatur $y=0$. Pract
non eiusmodi esse debet, ut $\int Rdy$ non fiat infinitum, quod eveniret
et $R=\frac{1}{y}$ vel $\frac{1}{y^2}$ etc.

340. Ponamus ergo esse $R = \frac{1}{\sqrt{y}}$; erit

$$\int R\,dy = 2\sqrt{y} \quad \text{et} \quad A = 2\sqrt{a}.$$

Hinc habebitur ista aequatio

$$2dx\sqrt{ay} = dy\sqrt{(gbx - 4ay)}.$$

Quae aequatio quia est homogenea, ponatur $x = qy$; erit

$$2q\,dy\sqrt{a} + 2y\,dq\sqrt{a} = dy\sqrt{(gbq - 4a)}$$

seu

$$\frac{dq}{\sqrt{(gbq - 4a)} - 2q\sqrt{a}} = \frac{dy}{2y\sqrt{a}}.$$

Posito $\frac{gb}{4a} = n$ et $\sqrt{(nq - 1)} = r$ erit

$$\frac{dy}{y} = \frac{-2r\,dr}{r^2 - nr + 1}.$$

Quae posterior formula a quadratura circuli pendebit, si $n < 2$.

Altero vero casu $n > 2$ erit integrale[1])

$$ly = lC + \frac{n - \sqrt{(n^2 - 4)}}{\sqrt{(n^2 - 4)}}\, l\left(2r - n + \sqrt{(n^2 - 4)}\right) + \frac{-n - \sqrt{(n^2 - 4)}}{\sqrt{(n^2 - 4)}}\, l\left(2r - n\right.$$

Quae ob

$$r = \frac{\sqrt{(nx - y)}}{\sqrt{y}}$$

abit in hanc

$$C\left(2\sqrt{(nx - y)} - \left(n - \sqrt{(n^2 - 4)}\right)\sqrt{y}\right)^{\frac{n - \sqrt{(n^2 - 4)}}{\sqrt{(n^2 - 4)}}}$$

$$= \left(2\sqrt{(nx - y)} - \left(n + \sqrt{(n^2 - 4)}\right)\sqrt{y}\right)^{\frac{n + \sqrt{(n^2 - 4)}}{\sqrt{(n^2 - 4)}}}.$$

Ubi pro C constantem quamcunque accipere licet, quia ipsa aequa
comparata, ut posito $x = 0$ fiat $y = 0$. Per methodum autem supra
(§ 335) ex aequatione differentiali statim habetur haec integralis

$$2q\sqrt{a} = \sqrt{(gbq - 4a)} \quad \text{seu} \quad 2x\sqrt{a} = \sqrt{(gbxy - 4ayy)}.$$

1) Editio princeps: *Hoc vero casu erit integrale* Correxit P. St.

ritur

$$\frac{y}{x} = \frac{gb \pm \sqrt{(g^2b^2 - 64a^2)}}{8a},$$

at duas lineas rectas, nisi sit $gb < 8a$, quo casu aequatio est imagi-

casu, quo $n = 2$, erit

$$\frac{dy}{y} = \frac{-2rdr}{(r-1)^2} \quad \text{seu} \quad ly = -2l(r-1) + \frac{2}{r-1},$$

t

$$ly = -2l\left(\sqrt{(2x-y)} - \sqrt{y}\right) + 2l\sqrt{y} + \frac{2\sqrt{y}}{\sqrt{(2x-y)} - \sqrt{y}} + lC$$

$$l\left(\sqrt{(2x-y)} - \sqrt{y}\right) - lC = \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{(2x-y)} - \sqrt{y}}.$$

am pro C quantitatem quamcunque accipere licet.

$n < 2$, tum constructio curvae partim a logarithmis, partim a qua- circuli pendet; fiunt enim ob $\sqrt{(n^2 - 4)}$ imaginarium logarithmi in- maginarii. Hoc igitur casu expedit constructionem perficere prae ex- ne analytica.

PROPOSITIO 38

PROBLEMA

1. *Sollicitetur corpus perpetuo deorsum vi uniformi g dataque sit curv* *aque BSC* (Fig. 43, p. 148); *invenire omnes curvas AMC, super quibu* *descendendo ex A dato tempore ad curvam BSC perveniat.*

SOLUTIO

t curvarum quaesitarum quaecunque AMC, per cuius quodvis punc M ducatur curva MQ similis curvae BSC respectu puncti fixi A, e at curvae AND applicata NQ tempus per arcum AM; exponet erg ta BD tempus per totam curvam AMC. Quo facto poterit vicissim a curva AND curva AMC inveniri. Quare si infinitae curvae AND antur, quae omnes in B habeant applicatam BD communem, eae ge

nerabunt infinitas curvas AMC, super quibus omnibus co...
dendo dato tempore per BD expresso ad curvam BSC pe...

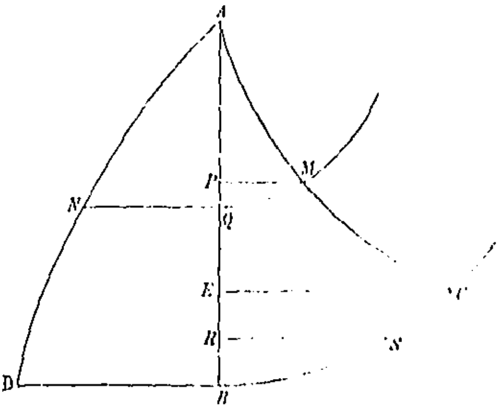


Fig. 48.

$AB = a$, $BD = \sqrt{b}$ et arcui QM abscindatur arcus similis ...
BSC; erit

$$AQ : AB = PM : RS = AP : AR = PQ : B\ldots$$

Ponatur porro $AP = x$, $PM = y$, $AQ = u$, $QN = t$, ...
dabitur ob curvam BSC datam aequatio inter r et s atque ...
datam dabitur aequatio inter t et u. At ob similitudinem ...

$$u : a = y : s = x : r,$$

unde erit

$$y = \frac{us}{a} \quad \text{et} \quad x = \frac{ur}{a}.$$

Celeritas deinde corporis in M debita est altitudini gx, ex...
AM erit

$$= \int \frac{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{\sqrt{gx}},$$

quod aequale poni debet ipsi t; unde oritur ista aequatio

$$gx\,dt^2 = dx^2 + dy^2.$$

Quia autem t per u datur, sit $dt = pdu$ et p sit functio ip...

$$dx = \frac{udr + rdu}{a} \quad \text{et} \quad dy = \frac{uds + sdu}{a}$$

ansibit illa aequatio in hanc

$$garup^2du^2 = (udr + rdu)^2 + (uds + sdu)^2.$$

quia curva BSC datur, erit s functio ipsius r sitque $ds = qdr$ exis functione ipsius r quacunque. His substitutis habebitur aequatio in r ista

$$garup^2du^2 = (udr + rdu)^2 + (uqdr + sdu)^2.$$

hac radice quadrata extracta dat

$$\frac{dr}{du} = \frac{-r - sq \pm \sqrt{(2rsq - s^2 - r^2q^2 + garup^2(1+qq))}}{u(1+qq)}.$$

x qua si aequatio inter r et u inveniatur, inde habebitur simul aec ter x et y pro curva quaesita.

Quod autem ad curvam AND attinet, sit P functio quaecunque ip $\int Pdu$ ita integratum, ut evanescat facto $u = 0$ et fiat $= A$ posito m sumatur

$$t = \frac{\sqrt{b}\int Pdu}{A}$$

ro aequatione curvae AND. Erit ergo

$$p = \frac{P\sqrt{b}}{A},$$

bi pro P functionem quamvis ipsius u ponere licet. Q. E. I.

COROLLARIUM 1

342. Si u ponatur $= 0$, eo ipso quoque x et y evanescunt, nisi at r vel s infinitum. Illo igitur casu in integratione aequationis dif alis inventae constantem quamcunque addere licet, quia non opus es datum habeat valorem, si u fit $= 0$.

COROLLARIUM 2

343. Tum igitur ob constantem arbitrariam addendam ex unica ND data innumerabiles inveniuntur curvae AMC quaesito satisfacien

COROLLARIUM 3

344. Si curva BSC ita est comparata, ut nusquam neque r ne eri queat infinite magnum, semper unica curva AND infinitas dabit

quaesitas AMC. Quae non solum hanc habebunt prop
super iis descendentia simul ad datam BSC perveniant
ad quamvis datae similem curvam QM pertingent.

COROLLARIUM 4

345. Cum igitur in integratione aequationis inventa
cunque addere liceat, ea ita poterit assumi, ut curva
ctum C curvae datae BSC dirigatur. Hocque modo in
poterunt inveniri, quae omnes in dato puncto C conveni

SCHOLION 1

346. Posuimus curvas QM similes curvae BSC,
erecta fiat infinite parva et omnia puncta curvae BSC i
et y evanescant posito $u=0$. Potuissemus autem eode
vel cum BSC congruentes ponere vel discrepantes lege
functio ipsius u quaecunque evanescens posito $u=0$
facto $u=a$, curva QM ita pendere poterit a curva BS

$$x=\frac{Qr}{B}\quad\text{et}\quad y=\frac{Qs}{B};$$

namque facto $u=a$ curva QM transibit in ipsam BSC e
ctum transibit, nisi curva BSC in infinitum progrediatur
pro Q talis accipi poterit functio, ut, etiamsi fiat $r=$
fiat $=0$, si $u=0$. Posito autem $dQ=Vdu$ habebit
sequens

$$Qdr(1+qq)+Vdu(r+sq)=du\sqrt{\Big(\frac{gbBP^2Qr(1+qq)}{A^2}}$$

Quae aequatio latissime patet et ex unica curva A
curvas AMC suggeret, quin etiam infinitas suppeditat
punctum C transeunt.

SCHOLION 2

347. Quantumvis generalis autem est haec aequati
est similis curvae BSC, quia est $x:y=r:s$. Quare adl

hiberi, in qua curvae QM utcunque dissimiles ponuntur curvae smodi tamen, ut QM in BSC abeant facto $u = a$. Obtinebitur solutio, si R sumatur functio quaecunque ipsius u evanescens facto atque R in D posito $u = a$ sitque $dR = Wdu$. Sumatur enim

$$x = \frac{Qr}{B} \quad \text{et} \quad y = \frac{Rs}{D};$$

n r et y in s, si fiat $u = a$, atque evanescente u tam x quam y t, quicquid sit r. Hinc autem sequens orietur aequatio generalissima

$$dr(D^2Q^2 + B^2R^2q^2) + du(D^2QVr + B^2RWqs)$$
$$+ du\sqrt{\left(\frac{gBD^2bP^2Qr(D^2Q^2 + B^2R^2q^2)}{A^2} - B^2D^2(RVqr - QWs)^2\right)}.$$

quatione loco dr introduci potest ds ponendo $\frac{ds}{q}$ loco dr, vel etiam terit x introduci ponendo loco r eius valorem $\frac{Bx}{Q}$ et tum habebitur inter u et x. Notandum autem est, quia Q evanescit facto $u = 0$, esse debere functionem ipsius u, ut P^2Q posito $u = 0$ vel fiat quana vel infinite magna; at tamen cavendum est, ne $\int Pdu$ debito atum fiat infinite magnum.

COROLLARIUM 5

Aequatio in solutione inventa fit separabilis, si fuerit $P = \frac{1}{\sqrt{u}}$; erit et $p = \frac{\sqrt{b}}{2\sqrt{au}}$. Habebitur enim

$$\frac{du}{u} = \frac{dr(1 + qq)}{-r - sq \pm \sqrt{\left(\frac{gbr}{4}(1 + qq) - (s - rq)^2\right)}};$$

nim s et q per r.

COROLLARIUM 6

Simili modo aequatio scholii 1 separationem admittet, si fuerit

$$P^2Q = V^2 \quad \text{seu} \quad P = \frac{V}{\sqrt{Q}}.$$

Habebitur enim

$$\frac{dr(1+qq)}{-r-sq\pm\sqrt{\left(\frac{gBbr(1+qq)}{AA}-(s-rq)^2\right)}}=\frac{Vdu}{Q}=\frac{dQ}{Q},$$

in qua indeterminatae u et r sunt a se invicem separatae.

EXEMPLUM 1

350. Manente $P^2Q=V^2$ seu $\int Pdu=2\sqrt{Q}$ ob $Vdu=dQ$, …
$n=a$ $A=2\sqrt{B}$. Unde fit

$$\frac{dQ}{Q}=\frac{dr(1+qq)}{-r-sq\pm\sqrt{\left(\frac{gbr}{4}(1+qq)-(s-rq)^2\right)}}.$$

Habebit ergo $\int Pdu$ requisitam proprietatem, ut evanescat facto u = …
nescit enim Q. Sit nunc curva BSC circulus super diametro AB …
tus; erit

$$s=\sqrt{(ar-r^2)}\quad\text{et}\quad q=\frac{a-2r}{2\sqrt{(ar-r^2)}}$$

atque

$$1+qq=\frac{a^2}{4(ar-r^2)};$$

his valoribus loco s et q substitutis prodibit ista aequatio

$$\frac{dQ}{Q}=\frac{adr}{\left(-2\sqrt{(ar-rr)}\pm\sqrt{(gbr-4r^2)}\right)\sqrt{(ar-r^2)}}.$$

Quae aequatio non solum indeterminatas a se invicem habet separ…
etiam generaliter per logarithmos integrari potest; potest enim in ae…

$$\frac{dQ}{Q}=\frac{adr}{-2ar+2r^2\pm r\sqrt{(gb-4r)(a-r)}}$$

membrum irrationale rationale effici. Prodibit autem integralis hae…

$$lQ=\frac{4a}{4a-gb}\,l\,\frac{2\sqrt{(a-r)}\mp\sqrt{(gb-4r)}}{\sqrt{r}}\pm\frac{\sqrt{gab}}{4a-gb}\,l\,\frac{\sqrt{a(gb-4r)}+\sqrt{gb(a-r)}}{\sqrt{a(gb-4r)}-\sqrt{gb(a-r)}}$$

ic convenit casum, quo

$$gb = 4a \quad \text{seu} \quad \sqrt{b} = \frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{g}},$$

ns per quamvis curvam AMC aequale ponitur tempori descensus m verticalem AB; tum enim erit

$$\frac{dQ}{Q} = \frac{adr}{-2(ar - r^2) \pm 2(ar - r^2)}.$$

signum + valeat, erit $dr = 0$ et $r = \text{const.} = c$, unde fit

$$s = \sqrt{(ac - c^2)}$$

$$x : y = \sqrt{c} : \sqrt{(a - c)} \quad \text{seu} \quad y\sqrt{c} = x\sqrt{(a - c)},$$

atio omnes dat chordas in hoc semicirculo ex A ductas, quemad-m demonstravimus [§ 102] tempora per singulas chordas esse inter a. Valeat signum —, erit

$$\frac{4\,dQ}{Q} = \frac{-adr}{ar - rr}$$

:

$$Q^{-4} = \frac{C^{-4}r}{a - r} \quad \text{seu} \quad \frac{r}{a - r} = \frac{C^4}{Q^4}.$$

$$Q = C\sqrt{\sqrt{\frac{a - r}{r}}}$$

$s = \sqrt{(ar - r^2)}$ habebitur

$$x = \frac{Cr}{B}\sqrt{\sqrt{\frac{a - r}{r}}} \quad \text{et} \quad y = \frac{C}{B}\sqrt{\sqrt{r(a - r)^3}};$$

ergo r prodibit ista aequatio $\left(\text{posito } \frac{C}{B} = m\right)$

$$y^2 + x^2 = ma\sqrt{xy}.$$

curvae hanc habent proprietatem, ut arcus earum a semicirculo bsolvantur descendendo eodem tempore, eo scilicet tempore, quo emicirculi chordae percurruntur.

COROLLARIUM 7

351. Huius autem curvae, cuius aeq

$$y^2 + x^2 = ma\sqrt{xy},$$

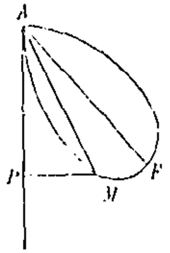


Fig. 44.

figura est $AMFA$ (Fig. 44); habet nimiru
cum verticali AP angulum semirectum c
A nodum. At vero omnes hae curvae su
et omnes ad omnes circulos accommodar

COROLLARIUM 8

352. Si ergo in hac curva sumatur quodcumque punct
et A circulus transiens concipiatur centrum habens in ver
arcum AM eodem tempore percurret, quo diametrum circuli
AM. Quare haec curva hanc habet proprietatem, ut qu
corpore ex A descendente absolvatur eodem tempore, quo

COROLLARIUM 9

353. Hoc ergo casu, quo $P^2Q = V^2$ [§ 349], perinde e
sive secus; eadem enim prodit aequatio inter x et y, uti
hoc quam ex aequatione intelligitur.

EXEMPLUM 2

354. Manente $P^2Q = V^2$, ut sit

$$\frac{dQ}{Q} = \frac{dr(1+qq)}{-r-sq \pm \sqrt{\left(\frac{gbr}{4}(1+qq) - (s-rq)^2\right)}},$$

sit curva BSC circulus centro A radio $AB = a$ descriptus;

et

$$s = \sqrt{(a^2 - r^2)}$$

$$q = \frac{-r}{\sqrt{(a^2-r^2)}} \quad \text{atque} \quad 1 + qq = \frac{a^2}{a^2 - r^2}.$$

substitutis prodibit sequens aequatio

$$\frac{dQ}{Q}=\frac{\pm\, a\,dr}{\sqrt{\left(\frac{gbr}{4}-a^2\right)(a^2-r^2)}},$$

maius esse debet quam $4a$, quia r non excedere potest a. Hinc lle radius innotescit, qui quaesito satisfacit, ponendo

$$\frac{gbr}{4}=a^2 \quad \text{seu} \quad r=\frac{4a^2}{gb},$$

u erit

$$s=\frac{a\sqrt{(g^2b^2-16a^2)}}{gb}.$$

rit

$$x:y=4a:\sqrt{(g^2b^2-16a^2)} \quad \text{et} \quad \frac{y}{x}=\frac{\sqrt{(g^2b^2-16a^2)}}{4a},$$

t tangens anguli illius radii, super quo corpus dato tempore $\sqrt{b}$ ad riam pervenit, cum verticali AB. Curvae praeterea algebraicae non quia formula differentialis non effici potest rationalis.

EXEMPLUM 3

. Sumta aequatione generalissima ex § 347 ponatur linea BSC recta alis; fiet $r=a$ et $dr=0$. Hanc ob rem loco dr introducatur or $\frac{ds}{q}$, ubi q erit infinite magnum. Deletis ergo terminis, qui prae q unt, proveniet ista aequatio

$$ABRds+ABWsdu=\pm\, Ddu\sqrt{(gBabP^2Q-A^2a^2V^2)}.$$

equatio ob $Wdu=dR$ et P, Q et V data per u integrationem ad- Erit nempe

$$\frac{ABRs}{D}=C\pm\int du\sqrt{(gBabP^2Q-A^2a^2V^2)}.$$

aequatione ergo invenitur s. Deinde, cum sit $y=\frac{Rs}{D}$, at y evanescere facto $u=0$, debebit esse $C=0$, si quidem integrale

$$\int du\sqrt{(gBabP^2Q-A^2a^2V^2)}$$

$$x = \frac{Qa}{B} \quad \text{et} \quad y = \frac{\pm 1}{AB}\int du\sqrt{(gBabP^2Q - A^2a^2$$

Quae est aequatio generalis pro omnibus curvis, super qu
ad horizontalem datam descendit.

EXEMPLUM 4

356. Teneatur aequatio generalissima supra inventa (§
linea BSC recta verticalis parallela ipsi AB et ad distantia
erit $s = f$ et $q = 0$. Quare habebitur ista aequatio

$$ADQdr + ADrdQ = \pm du\sqrt{(gBD^2bP^2Qr - A^2B^2$$

Cum autem sit $Qr = Bx$, hoc substituto prodibit

$$ADdx = \pm du\sqrt{(gD^2bP^2x - A^2f^2W^2)},$$

unde invento x erit

$$y = \frac{fR}{D}.$$

At quia in illa aequatione indeterminatae x et u non sunt a s
ratae, non multum ex ea derivare licet.

SCHOLION 3

357. Ex generali huius problematis solutione, quando uni
infinitas dat curvas AMC, colligere licet solutionem huius pr
infinitae requiruntur curvae, super quibus omnibus corpus e
punctum pervenit. Quaelibet enim curva AND unam dabi
datum punctum curvae BSC transeuntem hocque modo innum
modi curvae obtinebuntur. Sed cum hoc modo solutio nimis
et operosa, aliam genuinam magis afferre convenit. Modus auten
ita est comparatus, ut unam curvam iam nosse oporteat, ex q
biles deducere docebimus. Haec ergo curva, quae nota esse de
ultra traditarum methodo eliciatur, ut ex § 350, ubi curva per
tum semicirculi transiens inveniri potest dato tempore describer

PROPOSITIO 39

PROBLEMA

Sollicitetur corpus perpetuo deorsum vi uniformi g dataque sit curva 'ig. 45), *super qua corpus ex A ad punctum datum C pervenit; invenire* *rvas ANC, super quibus corpus eodem tempore ad punctum C ex A*

SOLUTIO

nta verticali AB pro axe omnium curvarum sit curvae datae AMC $AP = t$, applicata $PM = u$ sitque curva ANC una quaesitarum; in ea arcus AN, qui eodem absolvatur quo arcus AM; ur puncta M et N recta MN truatur curva ALB talis, ut a PL aequalis sit rectae MN. rgo curva ALB occurret axi punctis A et B; nam incidente M in A punctum N quoque cidet et posito M in C pun- quoque erit in C, quia arcus t ANC eodem tempore per-

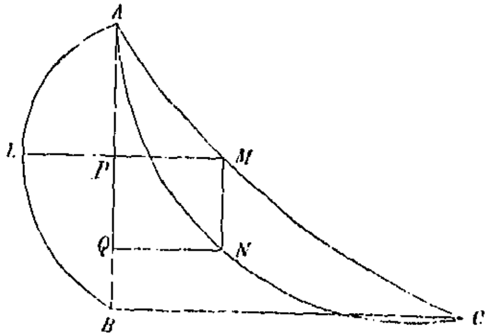


Fig. 45.

muntur. Intelligitur autem ex curva ALB inveniri posse curvam quare si infinitae huiusmodi curvae ALB concipiantur in A et B in- in AB, earum quaeque dabit curvam ANC hocque modo innumera- odibunt curvae ANC quaesito satisfacientes. Sit nunc $PL = r$; erit r quaedam ipsius $AP = t$; curvae autem ANC ponatur abscissa $AQ = x$ $= y$. His positis erit

$$MN = \sqrt{((x-t)^2 + (u-y)^2)} = r$$

$$y = u \pm \sqrt{(r^2 - (x-t)^2)}.$$

quia tempus per AM aequale ponitur tempori per AN, erit

$$\int \frac{\sqrt{(dt^2 + du^2)}}{\sqrt{gt}} = \int \frac{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{\sqrt{gx}}$$

$$x\,dt^2 + x\,du^2 = t\,dx^2 + t\,dy^2.$$

Est autem

$$dy = du \pm \frac{(rdr - xdx + tdx + xdt - tdt)}{\sqrt{(r^2 - (x-t)^2)}}$$

Sit $du = pdt$ et $dr = qdt$; erunt r, p et q functiones ips
brevitatis gratia $x - t = z$ seu $x = t + z$; erit

$$dy = pdt \pm \frac{qrdt - zdz}{\sqrt{(r^2 - z^2)}}$$

et

$$dy^2 + dx^2$$

$$= p^2dt^2 + dt^2 + 2dtdz + dz^2 \pm \frac{2pqrdt^2 - 2pzdtdz}{\sqrt{(r^2 - z^2)}} + \frac{q^2r^2dt^2}{}$$

Hinc obtinetur ista aequatio

$$\frac{tr^2dz^2}{r^2 - z^2} = \frac{2tqrzdtdz - tq^2r^2dt^2}{r^2 - z^2} \pm \frac{2pztdtdz - 2pqtrdt^2}{\sqrt{(r^2 - z^2)}} - 2tdt$$

ex qua z et t determinetur; habebitur aequatio inter x
appareat, cuiusmodi functio ipsius t loco r debeat accip
tam posito $t = 0$ quam $t = AB = a$, sit P functio quaecu
nescens posito $t = 0$ et Q sit etiam talis functio evanes
abeat vero Q in A, si fiat $t = a$; poterit ergo poni $r = I$
valore substituto quicquid loco P et Q substituatur, habe
curvis quaesitis. Q. E. I.

SCHOLION 1

359. Ex hac quidem aequatione maxime intricata paru
ad propositum, etiamsi haec methodus genuina esse videatu
aequatio inventa ad absurdum deducere debet, ut si curva
linea brevissimi descensus, quo casu non dari potest alia
descensus fiat eodem tempore. Ad nostrum ergo instit
videtur de lineis celerrimi descensus tractare eaque problem
quibus inter omnes curvas vel eiusdem longitudinis vel ali
communem habentes ea quaeritur, quae minimo tempore a
etiam quemadmodum inter omnes lineas, super quibus desc
tempore, ea sit invenienda, quae data quapiam proprieta

enim difficillimum sit omnes lineas idem descensus tempus habentes tamen ex iis quaelibet potest inveniri ex proprietate, quam prae omnibus possidet. Requiritur autem ad hanc rem pertractandam isoperimetricorum, quam ut passim expositam hic non explicabimus.

SCHOLION 2

Huius autem problematis solutio per § 348 sequenti modo habetur.

$$\frac{du}{u} = \frac{dr(1+qq)}{r-sq \pm \sqrt{\left(\frac{gbr}{4}(1+qq)-(s-rq)^2\right)}}.$$

um C (Fig. 43, p. 148), ad quod omnes curvae convenire debent, pona- $E=f$ et $EC=h$; si ergo fit $r=f$, fieri debet $s=h$. Ad hoc sit S uaecunque ipsius r, quae abeat in F posito $r=f$, quo facto ponatur

$$s=\frac{Sh}{F}.$$

tur hic valor in superiore aequatione eaque ita integretur, ut posito $r=f$. Deinde ex ea aequatione prodibit aequatio inter coordinatas uaesitae AMC, nempe $AP=x$ et $PM=y$, ex eo, quod est

$$x=\frac{ur}{a} \quad \text{et} \quad y=\frac{us}{a}.$$

bitrarius valor ipsius S dabit infinitas curvas AMC puncta A et C et super quibus corpus descendens tempore dato $=\sqrt{b}$ perveniet C. Sit autem $dS=Tdr$; erit $q=\frac{hT}{F}$ atque

$$\frac{du}{u}=\frac{dr(F^2+h^2T^2)}{F^2r-h^2ST \pm \sqrt{\left(\frac{gF^2br}{4}(F^2+h^2T^2)-(FhS-FhTr)^2\right)}}$$

$$\frac{du}{u}=\frac{dr(F^2+h^2T^2)}{F^2r-h^2ST \pm F\sqrt{\left(\frac{gbr}{4}(F^2+h^2T^2)-(hS-hTr)^2\right)}}.$$

uatio ita integretur, ut posito $u=a$ fiat $r=f$; quo facto ponatur

$$x=\frac{ur}{a} \quad \text{et} \quad y=\frac{hSu}{Fa}$$

bebitur aequatio inter x et y pro infinitis curvis AMC quaesito ntibus.

PROPOSITIO 40

PROBLEMA

361. *Invenire legem generalem, secundum quam cur*
corpus super ea descendens citissime perveniat ad quodvis

SOLUTIO

Sit AMC (Fig. 46) curva huiusmodi, super qua c
pore breviore perveniat quam super quavis alia cu

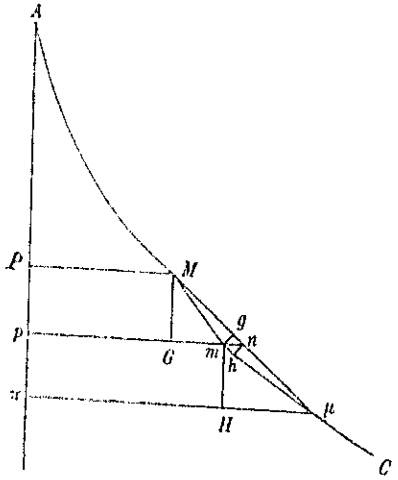


Fig. 46.

transeunte. Sum
quibusque [punctis
ea intercepta ita
ut corpus in motu
inter M et μ inte
pore absolvat qua
esset interceptus.
et μ proxima iun
Mm, $m\mu$, et debe
esse minimum seu
maximorum et mi
pori per elementa
Ducantur ad axem
mp, $\mu\pi$ sumtisque
se aequalibus seu quoque $MG = mH$ et pm, si opu
erit mn infinite parvum respectu elementorum Mm et

$$t.Mm + t.m\mu = t.Mn + t.n\mu.$$ [1])

Sit celeritas, quam corpus in M habet, debita altitud
elementum Mm quam Mn percurret. Celeritas autem,
debita sit altitudini $v + du$ et celeritas, quam in n ha
tudini $v + du + ddw$; illa autem celeritate percurret ele

1) IAC. HERMANN, *Phoronomia*, Amstelodami 1716, p. 55: „Ad
unusquisque motus absolvitur, utemur nota characteristica temporis t
ciendo praefigenda". P. St.

am $n\mu$. Hinc ergo habebitur ista aequatio

$$\frac{Mm}{\sqrt{v}} + \frac{m\mu}{\sqrt{(v+du)}} = \frac{Mn}{\sqrt{v}} + \frac{n\mu}{\sqrt{(v+du+ddw)}};$$

$$\frac{1}{\sqrt{(v+du+ddw)}} = \frac{1}{\sqrt{(v+du)}} - \frac{ddw}{2(v+du)\sqrt{(v+du)}},$$

ctis centris M et μ arculis mg et nh erit

$$\frac{ng}{\sqrt{v}} = \frac{mh}{\sqrt{(v+du)}} + \frac{n\mu\cdot ddw}{2(v+du)\sqrt{(v+du)}}.$$

t

$$\frac{1}{\sqrt{(v+du)}} = \frac{1}{\sqrt{v}} - \frac{du}{2v\sqrt{v}} \quad \text{et} \quad \frac{1}{(v+du)\sqrt{(v+du)}} = \frac{1}{v\sqrt{v}} - \frac{3du}{2v^2\sqrt{v}}.$$

neglectis negligendis, substitutis oritur

$$2v(mh-ng) = mh\cdot du - n\mu\cdot ddw = mh\cdot du - Mm\cdot ddw.$$

propter triangula similia nmg, mMG et nmh, μmH, ut sequitur,

$$ng : mn = mG : mM \quad \text{seu} \quad ng = \frac{mG\cdot mn}{Mm}$$

$$mh : mn = \mu H : m\mu \quad \text{seu} \quad mh = \frac{\mu H\cdot mn}{m\mu}.$$

rem erit

$$2v\left(\frac{\mu H}{m\mu} - \frac{mG}{Mm}\right) = \frac{mG\cdot du}{Mm} - \frac{Mm\cdot ddw}{mn} = 2v\,\text{diff.}\,\frac{mG}{Mm}.$$

equatio est homogenea et determinat naturam curvae AMC *chronae* vocatae, super qua corpus tempore brevissimo ex A ad C Q. E. I.

COROLLARIUM 1

Si ergo dicatur

$$MG = mH = dx, \quad mG = dy \quad \text{et} \quad Mm = \sqrt{(dx^2+dy^2)} = ds,$$

$$H\mu = dy + ddy \quad \text{et} \quad m\mu = ds + dds.$$

His substitutis habebitur

$$2vd.\frac{dy}{ds}=\frac{dydu}{ds}-\frac{dsddw}{mn}.$$

In qua si ex potentiis sollicitantibus determinentur v, du
aequatio pro curva brachystochrona. At semper ddw i
mn ex calculo excedat.

COROLLARIUM 2

363. Sit radius osculi curvae $Mm\mu=r$; isque i
ab axe AP directus erit

$$r=\frac{ds^3}{dxddy};$$

at est

$$d.\frac{dy}{ds}=\frac{dsddy-dydds}{ds^2}=\frac{dx^2ddy}{ds^3}.$$

Quare erit

$$d.\frac{dy}{ds}=\frac{dx}{r};$$

hinc prodibit ista aequatio

$$\frac{2vdx}{r}=\frac{dydu}{ds}-\frac{dsddw}{mn}.$$

Ubi notandum est esse $\frac{2v}{r}$ vim centrifugam, qua curva i
malem ad curvam premitur.

COROLLARIUM 3

364. Si ex potentiis sollicitantibus fluat

$$dv=Pdx+Qdy+Rds,$$

erit

$$du=Pdx+Qdy+Rds \quad \text{et} \quad ddw=Q\cdot mn\ +$$

quia puncto m in n translato crescit dy particula mn
Quia autem est $ny=\frac{dy\cdot mn}{ds}$, erit

$$\frac{ddw}{mn}=-Q-\frac{Rdy}{ds},$$

quibus substitutis habebitur ista aequatio

$$\frac{2v}{r}=\frac{Pdy-Qdx}{ds}.$$

SCHOLION 1

365. Ex solutione intelligitur formulam inventam latissime patere atque potentias sollicitantes quascumque extendi, etiam resistentia non excep... Quaecunque enim fuerint potentiae sollicitantes, determinari potest tam ... quam ddw, qui valores substituti dabunt aequationem pro brachystochro... quaesita. Attamen haec tantum locum habent, si potentiarum directio... nt in eodem plano; curva enim inventa est in eodem plano sita. Nih... tamen minus, si potentiae non fuerint in eodem plano, curva brachystochro... dato plano ope formulae huius poterit inveniri. In quolibet enim pla... to peculiaris erit curva brachystochrona, quaecunque fuerint potent... sollicitantes. Alia vero quaestio est, si quaeratur linea brachystochrona in... omnes omnino lineas data duo puncta iungentes, etiam non in uno pla... tas. Quoties vero potentiarum sollicitantium directiones in eodem pla... nt positae, dubium non est lineam brachystochronam in eodem positam e... lano. Nam si curvae non essent in eodem plano, potentiae oblique agere... propterea corpus non tantum, quantum fieri potest, accelerarent. Ex h... itur solutione tam linea absolute brachystochrona, si potentiarum soll... ntium directiones sunt in eodem plano, invenitur quam linea, quae in da... ano est brachystochrona, quaecunque fuerint potentiae sollicitantes.

SCHOLION 2

366. Quaestionem hanc de linea brachystochrona seu celerrimi descens... imus produxit Cel. IOH. BERNOULLI[1]) atque plures eius solutiones extant t... Act. Lips. quam Transactionibus Angl. et Comm. Acad. Paris. ... ibi, ubi hoc problema tam in hypothesi potentiae sollicitantis deorsum ... ctae quam pro viribus centripetis solutum dederunt[2]). Nemo autem p... ema fundamentale, quale hic dedimus, tam late patens praemisit, ut ...

1) IOH. BERNOULLI, *Curvatura radii in diaphanis non uniformibus solutioque problematis ... Actis 1696, p. 269, propositi de inveniendu linea brachystochrona*, Acta erud. 1697, p. 2... *...era omnia*, Tom. I, p. 187; *Lettre de Mr. JEAN BERNOULLI a Mr. BASNAGE, sur le probl... s isopérimètres*, Histoire des Ouvrages des Sçavans, Paris 1697, p. 452; *Opera om...* ...m. I, p. 194; *Remarques sur ce qu'on a donné jusqu'ici de solutions des problèmes sur les ...rimètres*, Mém. de l'acad. d. sc. de Paris 1718, p. 100; *Opera omnia*, Tom. II, p. 225. P...

2) Vide notam 2 p. 167. P. St.

potentias quascunque et resistentiam eadem ...
omnes $ddw = 0$, quod semper perperam fit, nisi direc...
vel mH. Et hanc ob rem Cel. HERMANNUS caespitavit, du...
brachystochronas in medio resistente inveniendas est n...
Petrop. A. 1727[1]); quasque correctas dedi in iisdem Co...
ipso problemate.

PROPOSITIO 41

PROBLEMA

367. *Si corpus perpetuo deorsum trahatur vi quacunque ...*
stochronam AMC (Fig. 46, p. 160), *super qua corpus citissim...*

SOLUTIO

Positis $AP = x$, $PM = y$ et arcu $AM = s$ sit vi...
deorsum urget, $= P$; erit $v = \int Pdx$ hoc integrali ita ...
posito $x = 0$, si quidem corpus motum in A ex qui...
atque $dv = Pdx$. Erit ergo

$$du = Pdx = dv \quad \text{et} \quad ddw = 0,$$

quia du invariatum manet eunte m in n. Quocirca ha...

$$2vd.\frac{dy}{ds} = \frac{dydv}{ds},$$

cuius integralis est

$$l\frac{v}{a} = 2l\frac{dy}{ds} \quad \text{seu} \quad vds^2 = ady^2,$$

hincque

$$dx^2\int Pdx = ady^2 - dy^2\int Pdx.$$

---

1) IAC. HERMANN, *Theoria generalis motuum, qui nascuntur a p... indesinenter agentibus*, Comment. acad. sc. Petrop. 2 (1727), 1729, ...

2) L. EULERI Commentatio 42 (indicis ENESTROEMIANI): *De ... medio quocunque resistente*, Comment. acad. sc. Petrop. 7 (1734/35), ... EULERI *Opera omnia*, series I, vol. 25. Vide etiam Commentationem ... *Curvarum maximi minimive proprietate gaudentium inventio nova et f...* Petrop. 8 (1736), 1741, p. 172; LEONHARDI EULERI *Opera omnia*, se...

uamobrem pro linea brachystochrona quaesita habebitur ista aequatio

$$dy = \frac{dx\sqrt{\int P dx}}{\sqrt{(a - \int P dx)}},$$

qua indeterminatae x et y sunt a se invicem separatae. Curvae aut
ngitudo habetur ex hac aequatione

$$ds = \frac{dx\sqrt{a}}{\sqrt{(a - \int P dx)}}.$$

E. I.

COROLLARIUM 1

368. In A igitur, ubi celeritas corporis evanescit seu fit $\int P dx = 0$,
$y = 0$, seu tangens curvae in A erit verticalis incidens in AP. At ubi
$\int P dx = a$, ibi tangens curvae erit horizontalis.

COROLLARIUM 2

369. Quia $ddw = 0$ et $du = P dx$, erit

$$\frac{2v}{r} = \frac{P dy}{ds}$$

363). Est vero $\frac{P dy}{ds}$ vis normalis, qua curva in M secundum norma
ersus axem AP ductam premitur. Consequenter vis normalis est aequ
centrifugae et in eandem plagam tendens. Quocirca linea brachystochr
unc habet proprietatem, ut tota pressio, qua curva premitur, sit duplo m
uam vis normalis sola. In sequentibus vero demonstrabimus hanc prop
tem in omnibus lineis brachystochronis sive in vacuo sive in medio resist
cum habere.

COROLLARIUM 3

370. Propter arbitrariam a dantur infinitae curvae brachystochr
mnes in A initium habentes. Atque hac litera a effici potest, ut curva
er datum punctum C transeat, quae erit linea inter A et C, super
empus est minimum.

371. Quia curva AMC (Fig. 47) alicubi habet ta
sit ea BC et in C sumatur alius axis verticalis CQ.

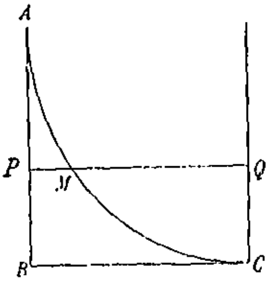


Fig. 47.

et $CM = S$; erit dX
$dS = -ds$ atque

$$\int P dX \quad a$$

integrali $\int P dX$ ita accepto
$X = 0$. Ad hunc ergo axem
habebitur ista aequatio

$$dY = \frac{dX\sqrt{(a - \int P dX)}}{\sqrt{\int P dX}} \quad \text{seu} \quad dS = \frac{d}{\sqrt{}}$$

COROLLARIUM 5

372. Hae ergo omnes curvae ad utramque parte
habent similes et aequales. Simili modo ad utramque
aequaliter est disposita. Quamobrem huiusmodi curv
habebunt inter se parallelas et ad distantiam BC posi
sollicitans ita accipiatur, ut supra A sit negativa, q
sursum tendere poterit et partem concavam deorsum

EXEMPLUM 1

373. Sit potentia sollicitans uniformis seu P
unde loco a posito gb pro brachystochrona in hac pote
thesi habebitur ista aequatio

$$dy = \frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{(b - x)}} \quad \text{seu} \quad ds = \frac{dx\sqrt{b}}{\sqrt{(b - x)}}$$

At si aequatio ad axem CQ referatur, erit

$$dY = \frac{dX\sqrt{(b - X)}}{\sqrt{X}} \quad \text{et} \quad dS = \frac{dX\sqrt{b}}{\sqrt{X}}$$

cuius integralis est $S = 2\sqrt{bX}$. Ex qua aequatione patet

si horizontali a circulo diametri b descriptam et deorsum conversam, odum hoc a Cel. IOH. BERNOULLI[1]) aliisque eximiis geometris[2]) iam st inventum. Si itaque dentur duo quaecunque puncta A et M, per qua corpus ex A citissime ad M descendit, invenitur, si descri- cloïs cuspidem in A et basem horizontalem habens atque per punctum ens; id quod ex eo, quod omnes cycloides sunt curvae similes, ex cripta cycloide facile efficitur. Tempus autem, quo corpus ex A ad git quodque est minimum, erit

$$=\int\frac{dx\sqrt{b}}{\sqrt{g(bx-x^2)}}$$

e AM longitudo erit

$$=\int\frac{dx\sqrt{b}}{\sqrt{(b-x)}}=2b-2\sqrt{b(b-x)}.$$

em sit

$$PM=y=\int\frac{xdx}{\sqrt{(bx-xx)}},$$

us per AM

$$=\frac{2y+2\sqrt{(bx-xx)}}{\sqrt{gb}}$$

in circulo diametri b, cuius sinus versus est $=x$, ducto in $\frac{2}{\sqrt{gb}}$.

ide notam 1 p. 163. P. St.

. G. L[EIBNIZ], *Communicatio suae pariter duarumque alienarum ad edendum sibi pri- . Io. BERNOULLIO, deinde a Dn. Marchione HOSPITALIO communicatarum solutionum pro- rvae celerrimi descensus a Dn. Io. BERNOULLIO geometris publice propositi, una cum solu- roblematis alterius ab eodem postea propositi*, Acta erud. 1697, p. 201; *Mathematische* erausgegeben von C. I. GERHARDT, 2. Abteilung, Band 1, Halle 1858, p. 301.

B[ERNOULLI], *Solutio problematum fraternorum ... una cum propositione aliorum*, Acta 7, p. 211; *Opera*, Genevae 1744, p. 768.

e L'HOSPITAL, *Solutio problematis de linea celerrimi descensus*, Acta erud. 1697, p. 217. EWTON], *Epistola missa ad praenobilem virum D. CAROLUM MONTAGUE, in qua solvuntur mata mathematicis a JOHANNE BERNOULLIO math. cel. proposita*, Philosophical trans- ondon) 1697, p. 384; Acta erud. 1697, p. 223; *Opuscula*, Tom. I, Lausannae et 744, p. 280.

AULT, *Analytical investigation of the curve of quickest descent*, Philosophical trans- London) 1698, p. 425.

RAIG, *The curve of the quickest descent*, Philosophical transactions (London) 46. P. St.

EXEMPLUM 2

374. Si potentia sollicitans P fuerit ut potestas qu
nempe $P = \frac{X^n}{f^n}$, erit

$$\int P dX = \frac{X^{n+1}}{(n+1)f^n}.$$

Consequenter curva brachystochrona AMC exprimetur

$$dY = \frac{dX\sqrt{((n+1)af^n - X^{n+1})}}{X^{\frac{n+1}{2}}} \quad \text{seu} \quad dS = dX$$

ita ut sit

$$S = \frac{2X^{\frac{1-n}{2}}}{1-n}\sqrt{(n+1)af^n}.$$

Quare si fuerit vel $n = 1$ vel $n > 1$, curva CM erit i
recta BC. Cuspis autem curvae A seu locus, in quo
sumendo

$$CQ = BA = \sqrt[n+1]{(n+1)af^n}.$$

Curvae prodibunt algebraicae, si fuerit

$$n = \frac{1-2m}{1+2m}$$

denotante m numerum integrum affirmativum quemcu
erit n numerus negativus unitate minor, ita tamen
affirmativus. Sit $m = 1$, erit $n = -\frac{1}{3}$. Quare fiet

$$dY = \frac{dX}{X^{\frac{1}{3}}}\sqrt{\left(\frac{2}{3}af^{-\frac{1}{3}} - X^{\frac{2}{3}}\right)},$$

cuius integralis est

$$Y = \frac{2a\sqrt{2a}}{3\sqrt{3f}} - \left(\frac{2}{3}af^{-\frac{1}{3}} - X^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$$

Quae aequatio ab irrationalitate liberata fit ordinis s
curvae algebraicae inveniuntur, quae in certis hypo
chronae.

SCHOLION 1

5. Ex data problematis solutione sequitur simul solutio problematis
, quo quaeritur potentia sollicitans deorsum directa talis, ut data
sit brachystochrona. Debet autem haec curva in puncto infimo C
tangentem horizontalem et alicubi in A, ubi est motus initium, tan-
verticalem. Ut si fuerit aequatio pro curva data haec $dY = RdX$, erit

$$R^2 \int PdX = a - \int PdX \quad \text{atque} \quad \int PdX = \frac{a}{R^2+1}.$$

nvenitur

$$P = \frac{-2aRdR}{(R^2+1)^2 dX} = \frac{-2adXdYddY}{dS^4}.$$

radius osculi in M ponatur r, propter $r = \frac{dS^3}{-dXddY}$ habebitur

$$P = \frac{2adY}{rdS}.$$

problema hac unica solvetur analogia: ut radius osculi curvae in M
um datam, ita sinus anguli, quem tangens curvae in M cum verticali
d potentiam sollicitantem, quae quaeritur. Altitudo vero debita celeri-
am corpus in M habet, est

$$a - \int PdX = \frac{aR^2}{R^2+1} = \frac{adY^2}{dS^2},$$

sequitur celeritatem corporis esse illi ipsi sinui anguli, quem tangens
cum verticali constituit, proportionalem. Ut si sit curva CMA cir-
adio c descriptus, erit $r = c$ et

$$dY = \frac{cdX - XdX}{\sqrt{(2cX - XX)}} \quad \text{atque} \quad dS = \frac{cdX}{\sqrt{(2cX - XX)}},$$

us fit

$$P = \frac{2a(c-X)}{c^2} = \frac{2a \cdot AP}{cc}.$$

o corpus deorsum trahens proportionalis esse debet abscissae AP, cui
eleritas est proportionalis.

376. Inventa linea brachystochrona pro hypothesi
deorsum tendentis ordo requireret, ut lineas brachysto
virium centripetarum determinaremus. At propositio
ita est comparata, ut elementa curvae Mm et $m\mu$ (Fig. 4
et ordinatas orthogonales MP, mp referantur, quod ad
petarum non commode quadrat. Videntur quidem elem
convergentia ad centrum virium considerari posse; sed
hoc oritur, quod elementa MG et mH non essent pa
fundamentalis requirit, perperam negligitur. Perspicu
determinando radio osculi, qui, si MG et mH fuerint

$$= MG : d. \frac{mG}{Mm};$$

quae autem expressio non locum habet, si MG et m
convergunt. Quare antequam ad brachystochronas in hy
petarum accedamus, ex propositione fundamentali gener
prietatem cuicunque potentiarum sollicitantium hypo
Ex quibus perspicietur Cel. HERMANNUM in *Phoronomia*[1])
stochronas pro viribus centripetis dederunt[2]), esse decept
cipio cum veritate non consentaneo, ut mox indicabitur

PROPOSITIO 42

THEOREMA

377. *Quaecunque fuerint potentiae sollicitantes, ea lin
quam corpus super ea motum premit vi duplo maiore, quam
fuga vel sola vis normalis.*

1) IAC. HERMANN, *Phoronomia, seu de viribus et motibus corpo
Amstelodami 1716, p. 81. P. St.

2) IOH. MACHIN, *Inventio curvae, quam corpus descendens breviss
gente vi centripeta ad datum punctum tendente, quae crescat vel decres
distantiae a centro; dato nempe imo curvae puncto et altitudine in prin*
transactions (London) 1718, p. 860. P. St.

DEMONSTRATIO

Quaecunque et quotcunque fuerint potentiae sollicitantes, eae omn[...]
[...]s resolvi possunt, quarum altera trahat secundum MG (Fig. 46, p. [...]
[...]ra secundum MP. Sit illa secundum MG trahens $= P$ et, quae secu[...]
[...]P trahit, $= Q$ et dicantur $AP = x$, $PM = y$ et $AM = s$ itemque alt[...]
[...]ritati in M debita $= v$. Erit ex his duabus viribus vis tangentialis

$$= \frac{Pdx - Qdy}{ds}$$

[...]vis normalis

$$= \frac{Pdy + Qdx}{ds}.$$

[...]c ob rem erit

$$dv = Pdx - Qdy.$$

[...]n hac expressione comparetur, quod supra (§ 364) est allatum, ubi pos[...]

$$dv = Pdx + Qdy + Rds;$$

Q negativum et $R = 0$. Sequitur ergo exinde fore

$$\frac{2v}{r} = \frac{Pdy + Qdx}{ds}.$$

[...]est $\frac{2v}{r}$ vis centrifuga, qua curva in M premitur, et $\frac{Pdy + Qdx}{ds}$ est vis [...]
[...]is. Quare cum vis centrifuga sit aequalis vi normali, tota pressio, [...]
[...]va sustinet, duplo maior est quam vel sola vis centrifuga vel sol[...]
[...]malis. Q. E. D.

SCHOLION 1

378. In sequente capite demonstrabimus hanc eandem propositi[...]
[...]m etiam habere in medio quocunque resistente; id quod quidem e[...]
[...]ra hic demonstrare potuissemus; sed quia resistentiae sequens capu[...]
[...]tinatum, eo potius hoc theorema transferre visum est.

COROLLARIUM 1

379. Ex hac igitur propositione facile erit in quacunque potenti[...]
[...]icitantium hypothesi brachystochronas determinare. Hocque ipsum [...]
[...] aliqua parte supra praestitimus, ubi curvas determinavimus, in q[...]
[...]ssio totalis datam habeat rationem ad vim centrifugam.

COROLLARIUM 2

380. Cum sit $dv = Pdx - Qdy$, erit $v = \int Pdx - \int Q$
ita accipiendis, ut evanescant factis x et $y = 0$, si quide
quiete incipere debet.

COROLLARIUM 3

381. Si ergo hic pro v inventus valor substituatur,
pro curva brachystochrona haec

$$\frac{2\int Pdx - 2\int Qdy}{r} = \frac{Pdy + Qdx}{ds}.$$

Est vero $r = \frac{ds^3}{dxddy}$ (§ 363) sumto dx pro constante, quia
sitam axi AP cadere r ponitur; unde habetur haec aequati

$$\frac{2dxddy}{ds^2}\left(\int Pdx - \int Qdy\right) = Pdy + Qdx.$$

COROLLARIUM 4

382. Quia haec aequatio est differentialis secundi g
duplicem integrationem requirit, altera integratione constan
adiici, altera effici debet, ut facto $x = 0$ fiat quoque $y =$
prodeunt curvae brachystochronae pro eadem potentiarum so
thesi. Atque constante arbitraria effici poterit, ut curva pe
transeat.

COROLLARIUM 5

383. Tempus, quo corpus ex A ad M pervenit, est

$$= \int \frac{ds}{\sqrt{(\int Pdx - \int Qdy)}} = \int \sqrt{\frac{2dxddy}{Pdy + Qdx}},$$

quae quidem expressio prius ex aequatione curvae est investi
vero hoc tempus esse debet inter omnia alia tempora mo
omnes puncta A et M iungentes.

SCHOLION 2

384. Quemadmodum porro in quacunque potentiaru
hypothesi eae curvae libere describuntur, in quibus vis ce

contraria vi normali, ita eae curvae ...
malis quoque aequalis est vi centrifugae, sed in eandem plagam ten
Atque quemadmodum illa proprietas communis est omnium curvarum
descriptarum etiam in medio resistente, ita haec quoque proprietas ad
lineas brachystochronas in medio resistente extenditur.

PROPOSITIO 43

PROBLEMA

85. *Si corpus vi quacunque perpetuo trahatur ad centrum virium C* (Fig. 48)*, ... e lineam brachystochronam AM, super qua corpus ex A citissime ad ... et.*

SOLUTIO

... puncto A, in quo motus initium ponitur, ad centrum virium ... ur recta AC, item MC et in tangentem MT ex C perpendiculum C... tur $AC = a$, $CM = y$, $CT = p$, vis ... peta in $M = P$ et celeritas in M ... altitudini v. His positis erit ... $-Pdy$ et $v = -\int Pdy$ hoc inte... ita accepto, ut evanescat posito ... Vis normalis autem erit $= \frac{Pp}{y}$; ... aequalis esse debet vis centrifuga et ... eandem plagam tendens; tum enim ... eniet curva brachystochrona, ut pro... ione praecedente demonstravimus. ... a igitur debebit esse convexa versus ... cum C et radius osculi in partem ... sam a centro C cadet. Quare, cum ... expressio $\frac{ydy}{dp}$ exhibeat radium osculi, ... tenus versus centrum cadit, erit vera ... i osculi expressio in nostro casu $\frac{-ydy}{dp}$. ... igitur centrifuga erit

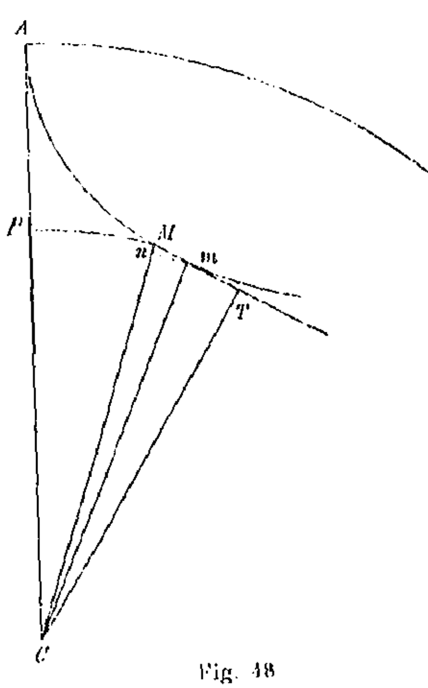


Fig. 48

$$= \frac{-2vdp}{ydy} = \frac{2dp\int Pdy}{ydy},$$

cui aequalis poni debet vis normalis $\frac{Pp}{y}$; ex quo oritur

$$\frac{2dp}{p} = \frac{Pdy}{\int Pdy},$$

cuius integralis est

$$\frac{pp}{b} = -\int Pdy \quad \text{seu} \quad p = \sqrt{-b\int Pd}$$

quae est aequatio pro curva quaesita inter y et p. At
arcus MP hicque dicatur $\frac{ys}{a}$, erit

$$nm = \frac{yds}{a} \quad \text{et} \quad pp = \frac{y^4 ds^2}{a^2 dy^2 + y^2 ds^2}$$

Hinc fiet

$$ds = \frac{-apdy}{y\sqrt{(y^2 - p^2)}}$$

atque valore ipsius p ex superiore aequatione substitut

$$ds = \frac{-ady\sqrt{-b\int Pdy}}{y\sqrt{(y^2 + b\int Pdy)}},$$

quae est aequatio inter y et arcum circuli s radio a d
angulum ACM, ex qua fluit constructio curvae quaesi

COROLLARIUM 1

386. Quia altitudo celeritati debita est

$$v = -\int Pdy = \frac{pp}{b},$$

celeritas corporis in quovis loco erit ut perpendiculu
demissum, simili modo, quo in motu libero celeritas
reciproce proportionalis.

COROLLARIUM 2

387. Sit radius osculi in $M = r$; erit $\frac{2v}{r} = \frac{Pp}{y}$ ex
Hinc ergo habebitur

$$r = \frac{2yv}{Pp} = \frac{2py}{bP}.$$

a autem in initio curvae in A est $p = 0$ seu AC tangens curvae, ius osculi quoque in $A = 0$, nisi forte simul vis centripeta P i nescat.

COROLLARIUM 3

388. Maximam corpus habebit celeritatem in loco, ubi $dp = 0$; ibi a aequatione pro curva fit $dy = 0$. Quare in eo loco corpus celer vetur, ubi recta CM in curvam est normalis. Curva ergo ultra ctum a centro C recedit.

SCHOLION 1

389. Celeritas ergo corporis in singulis brachystochronae punctis proportionalis sinui anguli, quem tangens curvae cum directione tripetae constituit; huius enim anguli TMC sinus est $\frac{p}{y}$, celeritas p inventa est proportionalis. Haec quidem proprietas locum habet trum virium infinite distat et directiones vis sollicitantis sunt inte llelae, ut ex prop. 41 intelligitur, ubi celeritas erat ut $\frac{dy}{ds}$, i. e. ut s uli, quem elementum curvae cum directione potentiae sollicitantis consti c autem proprietatem Cel. HERMANNUS in Comm. Acad. Petrop. A. 1 ibus brachystochronis tam in vacuo quam in medio resistente commu e est arbitratus. Atque hanc ob rem non solum eae lineae, quas in m stente pro brachystochronis dedit, tales non sunt, sed etiam quas in v viribus centripetis invenit. Hoc autem casu invenit hanc aequatio $\int Pdy = \frac{p^2}{y^2}$ a nostra atque vera aequatione prorsus discrepantem.

EXEMPLUM 1

390. Sit vis centripeta ipsis distantiis corporis a centro proportion $P = \frac{y}{f}$. Quare erit

$$\int Pdy = \frac{y^2 - a^2}{2f} \quad \text{atque} \quad v = \frac{a^2 - y^2}{2f} = \frac{p^2}{b}.$$

ac est aequatio pro brachystochrona in hac vis centripetae hypothesi t y. Altera vero aequatio inter arcum s radio a descriptum, qui

1) Vide notam 1 p. 164. P. St.

cui aequalis poni debet vis normalis $\frac{Pp}{y}$; ex quo oritur

$$\frac{2dp}{p} = \frac{Pdy}{\int Pdy},$$

cuius integralis est

$$\frac{pp}{b} = -\int Pdy \quad \text{seu} \quad p = \sqrt{-b\int Pdy}$$

quae est aequatio pro curva quaesita inter y et p. A
arcus MP hicque dicatur $\frac{ys}{a}$, erit

$$um = \frac{yds}{a} \quad \text{et} \quad pp = \frac{y^4 ds^2}{a^2dy^2 + y^2ds^2}$$

Hinc fiet

$$ds = \frac{-apdy}{y\sqrt{(y^2 - p^2)}}$$

atque valore ipsius p ex superiore aequatione substitut

$$ds = \frac{-ady\sqrt{-b\int Pdy}}{y\sqrt{(y^2 + b\int Pdy)}},$$

quae est aequatio inter y et arcum circuli s radio a d
angulum ACM, ex qua fluit constructio curvae quaesi

COROLLARIUM 1

586. Quia altitudo celeritati debita est

$$v = -\int Pdy = \frac{pp}{b},$$

celeritas corporis in quovis loco erit ut perpendicular
demissum, simili modo, quo in motu libero celeritas
reciproce proportionalis.

COROLLARIUM 2

587. Sit radius osculi in $M = r$; erit $\frac{2v}{r} = \frac{Pp}{y}$ ex
Hinc ergo habebitur

$$r = \frac{2yv}{Pp} = \frac{2py}{bP}.$$

Quia autem in initio curvae in A est $p=0$ seu AC tangens curvae, e radius osculi quoque in A $=0$, nisi forte simul vis centripeta P in evanescat.

COROLLARIUM 3

388. Maximam corpus habebit celeritatem in loco, ubi $dp=0$; ibi aute ex aequatione pro curva fit $dy=0$. Quare in eo loco corpus celerri movetur, ubi recta CM in curvam est normalis. Curva ergo ultra h punctum a centro C recedit.

SCHOLION 1

389. Celeritas ergo corporis in singulis brachystochronae punctis n est proportionalis sinui anguli, quem tangens curvae cum directione centripetae constituit; huius enim anguli TMC sinus est $\frac{p}{y}$, celeritas ve ipsi p inventa est proportionalis. Haec quidem proprietas locum habet, centrum virium infinite distat et directiones vis sollicitantis sunt inter parallelae, ut ex prop. 41 intelligitur, ubi celeritas erat ut $\frac{dy}{ds}$, i. e. ut sin anguli, quem elementum curvae cum directione potentiae sollicitantis constitu Hanc autem proprietatem Cel. HERMANNUS in Comm. Acad. Petrop. A. 172 omnibus brachystochronis tam in vacuo quam in medio resistente commune esse est arbitratus. Atque hanc ob rem non solum eae lineae, quas in mec resistente pro brachystochronis dedit, tales non sunt, sed etiam quas in vac pro viribus centripetis invenit. Hoc autem casu invenit hanc aequatione $\frac{-\int P dy}{b}=\frac{p^2}{y^2}$ a nostra atque vera aequatione prorsus discrepantem.

EXEMPLUM 1

390. Sit vis centripeta ipsis distantiis corporis a centro proportional fiet $P=\frac{y}{f}$. Quare erit

$$\int P dy=\frac{y^2-a^2}{2f} \quad \text{atque} \quad v=\frac{a^2-y^2}{2f}=\frac{p^2}{b}.$$

Quae est aequatio pro brachystochrona in hac vis centripetae hypothesi in p et y. Altera vero aequatio inter arcum s radio a descriptum, qui

1) Vide notam 1 p. 164. P. St.

mensura anguli ACM, et y est haec

$$ds = \frac{-a\,dy\sqrt{b(a^2-y^2)}}{y\sqrt{(2fy^2+by^2-a^2b)}}.$$

Huius curvae punctum infimum seu centro proximum habetur dy = 0 vel $p = y$; tum autem erit

$$y = \frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{(b+2f)}};$$

haec ergo est minima curvae a centro C distantia. Radius curvae in quovis puncto est

$$= \frac{2py}{bP} = \sqrt{\frac{2f(a^2-y^2)}{b}}.$$

In puncto ergo centro proximo radius osculi est maximus, quip

$$= \frac{2af}{\sqrt{b(b+2f)}}.$$

Ponatur tangens anguli $ACM = t$ posito sinu toto $= 1$; erit

$$\frac{ds}{a} = \frac{dt}{1+tt};$$

ponatur porro

$$\frac{\sqrt{b(a^2-y^2)}}{\sqrt{(2fy^2+by^2-a^2b)}} = q;$$

habebitur ista aequatio

$$\frac{dt}{1+tt} = \frac{dq}{1+qq} - \frac{dq}{1+\frac{b+2f}{b}qq}$$

Ex quo intelligitur curvam toties esse algebraicam, quoties est b quadratus. Longitudo curvae AM est porro generaliter

$$= \int \frac{-y\,dy}{\sqrt{(y^2+b\int P\,dy)}};$$

hoc ergo casu erit

$$AM = \int \frac{-y\,dy\sqrt{2f}}{\sqrt{(2fy^2+by^2-a^2b)}} = \frac{2af - \sqrt{2f(2fyy+byy-a^2}}{2f+b}$$

$$\sqrt{(b+2f)} \quad ,$$

super concava parte peripheriae AE centro C radio AC descriptae. igitur b pro lubitu accipere liceat, apparet omnes hypocycloides super pheria AE natas esse brachystochronas.

EXEMPLUM 2

391. Sit vis centripeta reciproce proportionalis quadratis distanti ut sit $P = \frac{f^2}{y^2}$; unde erit

$$\int P dy = -\frac{f^2}{y} + \frac{f^2}{a} = \frac{f^2(y-a)}{ay} \quad \text{atque} \quad v = \frac{f^2(a-y)}{ay} = \frac{p^2}{b},$$

quae est aequatio pro brachystochrona in hac vis centripetae hypo Altera vero aequatio inter arcum s et y erit ista

$$ds = \frac{-a\,dy\sqrt{bf^2(a-y)}}{y\sqrt{(ay^3+bf^2y-abf^2)}}.$$

Huius ergo curvae punctum infimum posito $dy=0$ determinabitur ope aequationis cubicae $ay^3+bf^2y=abf^2$. Ceterum ista aequatio inter s sufficit ad curvam quaesitam construendam.

SCHOLION 2

392. Ex his igitur, quae in hac et praecedentibus propositionibus a sunt, intelligitur, quomodo in quacunque potentiarum sollicitantium h thesi ea linea sit invenienda, super qua corpus ex dato puncto ad d punctum citissime perveniat. Nunc ergo etiam determinari oportet lineam, super qua corpus a dato puncto citissime non ad datum punc sed ad datam lineam perveniat, quae sane curva una erit ex infinitis bra stochronis; at quaenam ea sit, in sequente propositione declarabimus.

PROPOSITIO 44

THEOREMA

393. *Corpus a dato puncto A* (Fig. 49) *ad quan*
celerrime pervenit super linea brachystochrona AM, qu
angulos rectos occurrit, hocque in quacunque potentiarun

DEMONSTRATIO

Sit AM ea linea, super qua corpus ex A citissi
veniat; perspicuum est primo hanc lineam fore br

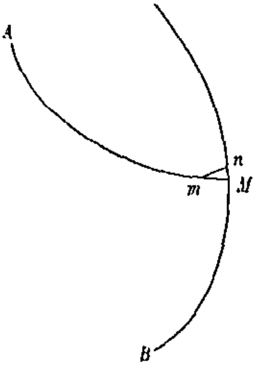


Fig. 49.

daretur linea, super qua co
perveniret, ea potius quae
terea haec linea AM ad
curvae BM occurrit; nisi
occurreret, ducta minima ne
corpus citius per Amn ad
quam per AmM. Quare
invenire possit, necesse es
curvae normaliter insistat
super ea infinitarum brach
curvam BM ductarum ci
pervenit, quae curvae BM ad angulos rectos occurr

COROLLARIUM 1

394. Si ergo infinitae curvae quaerantur, super
pore ab A ad lineam BM perveniat, oportet, ut
quam tempus per brachystochronam AM; alias oni
sibile.

COROLLARIUM 2

395. Si accidat, ut plures curvae brachystoc
curvam BM, plura quoque prodibunt tempora mi
enim methodus tam minima quam maxima declara

COROLLARIUM 3

396. Quia tempus per curvam brachystochronam AM est minimum,
lligitur ex methodo maximorum et minimorum, si duae brachystochro
roximae concipiantur normaliter insistentes curvae BM, tempora per
se inter se aequalia.

COROLLARIUM 4

397. Hinc porro perspicitur, si curva BM fuerit eiusmodi, ut om
rachystochronas ex puncto A ductas secet ad angulos rectos, tempora
nnes brachystochronas ad curvam BM usque ductas fore inter se aequa

COROLLARIUM 5

398. Quamobrem curva, quae ab omnibus curvis brachystochronis
uncto A ductis arcus isochronos seu eodem tempore percursos abscindit,
uoque omnes brachystochronas ad angulos rectos secabit seu erit illar
raiectoria orthogonalis.

COROLLARIUM 6

399. Atque vicissim quoque perspicitur, si curva, quae ab infinitis cur
rcus isochronos abscindit, fuerit earum traiectoria orthogonalis, eas infini
urvas omnes esse brachystochronas.

SCHOLION

400. Facile intelligitur hanc propositionem locum quoque habere
nedio resistente; simili enim modo apparet tempus per elementum mn
nale in curvam BM minus esse quam tempus per elementum mM, q
on est perpendiculare; in hoc autem totius demonstrationis vis est s
Quare si infinitis curvis ex puncto A eductis lex potentiarum sollicitanti
t resistentiae poterit inveniri, in qua eae curvae omnes sint brachystochro
imul harum curvarum traiectoria orthogonalis poterit exhiberi quaere
antum curvam ab iis curvis arcus isochronos abscindentem. Atque h
psam traiectorias orthogonales inveniendi methodum iam adhibuit
OH. BERNOULLI in Act. Lips. A. 1697.[1])

1) Vide notam 1 p. 163. P. St.

PROPOSITIO 45

PROBLEMA

401. *Inter omnes curvas puncta A et C* (Fig. 50) *iungentes*
longas eam determinare AMC, super qua corpus celerrime ex A ad
in hypothesi potentiae sollicitantis uniformis g et deorsum directae.

SOLUTIO

Ducta verticali AP et horizontali PM dicatur $AP = x$,
$AM = s$ eritque tempus, quo arcus AM absolvitur,

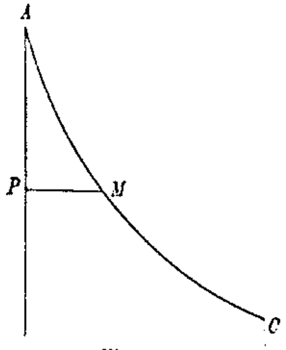


Fig. 50.

$$= \int \frac{ds}{\sqrt{gx}}.$$

Iam per methodum isoperimotricorum
peculiarem dedi dissertationem cum for
ralibus, ex quibus quaevis problemata fi
possunt, in Comment. Acad. Petr. A. 1
quantitates considerandae sunt: arcus AM
et tempus per $AM = \int \frac{ds}{\sqrt{gx}}$, quarum
terius respectu debet esse minima vel maxima. Eodem enim
inter omnes curvas aeque longas quaeratur ea, quae brevissimu
descensum, sive inter omnes, super quibus descensus fiunt eodem
ea, quae est brevissima. Per formulas autem meas dat $\int ds$ hanc q
$diff. \frac{dy}{ds}$ et $\int \frac{ds}{\sqrt{gx}}$ dat $diff. \frac{dy}{ds\sqrt{gx}}$, quarum altera alterius multiplo
aequalis est ponenda. Habetur ergo integrando

$$\frac{dy}{ds} = \frac{dy\sqrt{a}}{ds\sqrt{x}} - m$$

seu

$$dy(\sqrt{a} - \sqrt{x}) = mds\sqrt{x}.$$

1) L. Euleri Commentatio 27 (indicis Enestroemiani): *Problematis isoperimet*
simo sensu accepti solutio generalis, Comment. acad. sc. Petrop. 6 (1732/3), 17
Leonhardi Euleri Opera omnia, series I, vol. 25. P. St.

s vero quadratis erit

$$dy^2(\sqrt{a}-\sqrt{x})^2 = m^2xdx^2 + m^2xdy^2,$$

t

$$dy = \frac{mdx\sqrt{x}}{\sqrt{(a-2\sqrt{ax}+(1-m^2)x)}} \quad \text{et} \quad ds = \frac{dx(\sqrt{a}-\sqrt{x})}{\sqrt{(a-2\sqrt{ax}+(1-m^2)x)}}.$$

curva quaesita determinabitur. Q. E. I.

COROLLARIUM 1

In aequatione inventa duae insunt quantitates a et m arbitrariae, ffici potest, ut curva per datum punctum C transeat et ut simul sit ngitudinis. Atque tum haec curva celerrime absolvetur inter omnes vas eiusdem longitudinis per A et C transeuntes.

COROLLARIUM 2

Si ponantur a et m infinite magna, prodibit cyclois, quae non nter omnes curvas eiusdem longitudinis, sed inter omnes omnino absolvitur.

COROLLARIUM 3

Si ponatur $m = 0$, prodit $dy = 0$ seu recta verticalis. At si fiat ritur recta quaecunque per punctum A ducta. Est enim recta linea nes lineas, quae eodem tempore absolvuntur, minima seu brevissima.

COROLLARIUM 4

Si ponatur $m = 1$, prodibit curva algebraica; erit enim

$$dy = \frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{(a-2\sqrt{ax})}},$$

egralis est

$$y = \frac{-(4a+4\sqrt{ax}+6x)\sqrt{(a-2\sqrt{ax})}}{15\sqrt{a}} + \frac{4a}{15}.$$

Haec curva etiam est rectificabilis; namque erit

$$s = \frac{2a}{5} - \frac{(2a + 2\sqrt{ax} - 2x)}{5\sqrt{a}}\sqrt{(a - 2\sqrt{ax})}.$$

Quin etiam tempus per arcum AM algebraice poterit exprimi:

$$\int \frac{ds}{\sqrt{x}} = \frac{4\sqrt{a}}{3} - \frac{(4\sqrt{a} - 2\sqrt{x})\sqrt{(a - 2\sqrt{ax})}}{3\sqrt{a}}$$

Aequatio vero pro curva reducta fit ordinis quinti.

COROLLARIUM 5

406. Si in hac curva sumatur $x = \frac{a}{4}$, ibi tangens erit hor
recta verticalis in eo curvae puncto erit diameter curvae. H
fit $y = \frac{4a}{15}$ et longitudo curvae ad hoc punctum erit $\frac{2a}{5}$.
quo hic arcus absolvitur, est $= \frac{4\sqrt{a}}{3\sqrt{g}}$. Eodem ergo tempore c
scendet per altitudinem $\frac{4}{9}a$.

SCHOLION

407. Missis nunc hisce de celerrimo descensu progredimu
considerandas, super quibus plures descensus inter se comparati
relationem. Huc maxime pertinet quaestio de curvis tauto
quibus vel omnes descensus ad punctum infimum curvae usq
tempore vel integrae oscillationes. Ad haec deinde aliae a
quaestiones cum difficiles tum vim methodi, qua utemur, illu

PROPOSITIO 46

PROBLEMA

408. *Invenire legem generalem curvarum tautochronarum, su*
descensus ad punctum A, initio descensus ubicunque in curva AM
accepto, absolvantur eodem tempore.

SOLUTIO

Sumta recta AP pro axo dicatur curvae portio $AM = s$ sitque altitu
leritati in A debita $= b$ et altitudo celeritati in M debita $= v$; erit temp
o arcus AM absolvitur,

$$= \int \frac{ds}{\sqrt{v}},$$

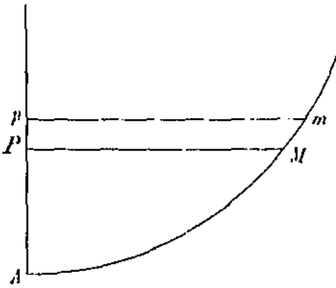


Fig. 51.

od integrale ita est capiendum, ut evanescat
sito $s = 0$. Tum, si in eo integrali ponatur
$= 0$, habebitur tempus descensus a loco, in
o celeritas erat nulla, usque ad punctum A
n totum descensus tempus; id quod eadem
antitate expressum esse debet, quaecunque fuerit quantitas b. Haec igi
antitas b neque in expressione temporis inesse debet neque in expressi
o curva AM, quia haec eadem curva idem descensus tempus produc
bet, utcunque varietur b.

Sit iam v quantitas composita ex littera z, ad curvam pertinente e
rva AM cum abscissa AP et applicata PM tantum pendente neque b
lvente, atque ex littera h, quae ex b et quantitatibus constantibus
mposita. Sit autem v talis ipsarum h et z functio, ut evanescat pos
$= h$ atque ut fiat $= b$, si sit $z = \alpha h$ existente α numero quocunque.
tur porro $ds = pdz$ pro aequatione curvae quaesitae; debebit p talis e
antitas, in qua non contineatur b vel h, quia hae litterae in aequation
rvae ingredi nequeunt. Habebimus ergo pro expressione temporis per A

$$\int \frac{p\,dz}{\sqrt{v}}$$

c integrali ita accepto, ut evanescat posito $v = b$ seu $z = \alpha h$. Deinde
tegrale, si in eo ponatur $z = h$, dabit tempus totius descensus, in
inesse non poterit. Hoc vero eveniet, si $\int \frac{p\,dz}{\sqrt{v}}$ fuerit functio ipsarum
z nullius dimensionis seu si $\frac{pz}{\sqrt{v}}$ fuerit functio nullius dimensionis.
functio m dimensionum ipsarum h et z; debebit esse

$$p = Cz^{\frac{m-2}{2}}$$

denotante C quantitatem constantem a b non pendente
v talis functio fuerit comperta, habebitur pro curva qua

$$ds = Cz^{\frac{n-2}{2}} dz \quad \text{seu} \quad s = \frac{2Cz^{\frac{n}{2}}}{m} + \text{cons}$$

si opus est, quo s evanescat, si in z evanescat vel x ve

CORROLLARIUM 1

409. Quo igitur haec methodus possit adhiberi,
tatibus finitis sit expressum atque ut ea expressio
functionem homogeneam ex h et z constantem.

COROLLARIUM 2

410. Hanc ob rem necesse est, ut fiat $v = b$, si po
quantitate constante adiecta etiam non reperiatur h
viderimus fieri $v = b$ facto $z = \alpha h$, neque opus est, ut

COROLLARIUM 3

411. Intelligitur etiam curvam in A habere debere
in directionem vis sollicitantis; nisi enim hoc fuerit
descensus infinite parvum foret quoque infinite parvum.

SCHOLION

412. Valet haec solutio non solum, si, uti figura in
per coordinatas orthogonales; nihil enim interest, qui
naturam curvae exponere velimus, dummodo in z non
autem z continere lineas et quantitates quascunque a c
igitur methodo in vacuo, in quacunque potentiarum sol
lineae tautochronae poterunt inveniri, quia semper cel
finitas exprimi potest. At si, ut in mediis resistentibus
non potest exhiberi finitis quantitatibus, haec methodus
sed alia desideratur, quae succedit, etiam si celeritas p
rentialem tantum detur.

PROPOSITIO 47

PROBLEMA

413. *Si corpus deorsum sollicitetur vi quacunque, invenire lineam tautochronam per qua omnes descensus fiant eodem tempore.*

SOLUTIO

Posito $AP = x$, $PM = y$ et $AM = s$ (Fig. 51, p. 183) sit celeritas debita altitudini b et in M debita altitudini v. Sit porro vis sollicitans $M = P$; erit $v = b - \int Pdx$ integrali $\int Pdx$ ita accepto, ut evanescat facto $x = 0$. Iam si ponatur $b = h$ et $\int Pdx = z$, erit v functio unius dimensionis ipsarum h et z et evanescit facto $z = h$ fitque $v = b$ facto $z =$ 0. Erit igitur $m = 1$ ideoque habebitur pro curva quaesita ista aequatio

$$ds = \frac{Cdz}{\sqrt{z}} \quad \text{et} \quad s = 2\sqrt{az} = 2\sqrt{a\int Pdx}.$$

Si desideretur aequatio inter x et y, erit ob $ds = \frac{aPdx}{\sqrt{a\int Pdx}}$

$$dy = \frac{dx\sqrt{(aP^2 - \int Pdx)}}{\sqrt{\int Pdx}}.$$

Q. E. I.

COROLLARIUM 1

414. Quia evanescit $\int Pdx$ facto $x = 0$, tangens curvae in A erit horizontalis, nisi in A evanescat P. Atque curva alicubi habebit tangentem verticalem ibique plerumque cuspidem; hoc evenit, ubi erit $\int Pdx = aP^2$; ibi enim fit $dy = 0$.

COROLLARIUM 2

415. Huius curvae in puncto infimo A radius osculi est aequalis subnormali $= \frac{ydy}{dx} = \frac{sds}{dx}$, quia in A s et y fiunt aequalia. Quare in A erit radius osculi $= 2aP$, ubi P denotat potentiam sollicitantem in puncto A.

416. Ex radio osculi in A et potentia sollicitante ... ascensus vel descensus per infinite parvum arcum

$$\frac{\pi\sqrt{4aP}}{2\sqrt{P}} = \pi\sqrt{a}.$$

(§ 172). Huicque tempori tempus cuiusque descensus ... thesi ergo gravitatis = 1 pendulum longitudinis $2a$ d... eodem tempore absolvet.

EXEMPLUM 1

417. Sit potentia sollicitans ubique constans, nem...

$$\int Pdx = gx \quad \text{atque} \quad s = 2\sqrt{ga \ldots}$$

itemque

$$dy = \frac{dx\sqrt{(ga - x)}}{\sqrt{x}},$$

unde intelligitur curvam esse cycloidem deorsum c... linea brachystochroma in eadem potentiae hypothe... autem omnes descensus fiant eodem tempore supe... demonstravimus (§ 187).

EXEMPLUM 2

418. Sit potentia sollicitans ut potestas quaecum...

$$P = \frac{x^n}{f^n} \quad \text{et} \quad \int Pdx = \frac{x^{n+1}}{(n+1)f^n}$$

si quidem fuerit $n+1$ numerus affirmativus; sin eni... negativus, fieret $\int Pdx = \infty$. Erit igitur

$$s = \frac{2x^{\frac{n+1}{2}}}{f^{\frac{n}{2}}}\sqrt{\frac{a}{n+1}} \quad \text{atque} \quad dy = dx\sqrt{(a \ldots}$$

Ex qua aequatione intelligitur curvam fore rectam ... horizontem, si fuerit $n = 1$. At si $n > 1$, curva in ... quo usque nimirum f^n incipit minus esse quam $(n + \ldots$

SCHOLION 1

419. Ex aequatione generali apparet rectam AP esse diamet
vae. Quare cum in vacuo ascensus sint similes descensibus, semiosc
nes omnes super curva MA ad alteram partem usque producta e
que isochronae et consequenter etiam integrae oscillationes. Deinde
arbitrariam a infinitae sint curvae tautochronae AM, duae quaeque
cto A coniunctae, ut ibi habeant tangentem communem horizonta
ducent tam semioscillationes quam integras oscillationes isochronas
icet pendulum ita accommodetur, ut oscillando huiusmodi curvas abso

SCHOLION 2

420. Intelligitur etiam ex solutione eas curvas, quas invenimus,
as, quae quaesito satisfaciunt. Nam loco p alia functio ipsius z subs
nit, ut in integrali, si ponatur $v = 0$, prorsus ex formula exeant b se
quod aliis methodis, quibus tautochronae sunt inventae, non satis lic

SCHOLION 3

421. Quia est $s = 2\sqrt{a}\int Pdx$, erit $P = \frac{sds}{2adx}$. Ex quo apparet, c
li esse debeat potentia sollicitans, ut data curva sit tautochrona. Sci
entia deorsum tendens debet esse proportionalis ipsi $\frac{sds}{dx}$ ex data c
unto. Quare, nisi curva sit rectificabilis, valor potentiae sollicitantis
est algebraice exhiberi.

PROPOSITIO 48

PROBLEMA

422. *Si corpus perpetuo trahatur ad centrum virium C* (Fig. 52, p. 188) *vi
que, invenire lineam tautochronam BMA, super qua corpus omnes descensu
ctum A usque eodem tempore absolvat.*

SOLUTIO

Dicatur $CA = c$, $CM = y$ et vis centripeta in M corpus sollicitans
porro celeritas in A debita altitudini b et ea in M altitudini v. Sum

$\int Pdy$ ita, ut evanescat posito $y = c$, quo facto erit $v =$
ergo b pro h et $\int Pdy$ pro z erit functio ipsarum h o
unius dimensionis
Si nunc arcus AM

$$s = 2\sqrt{az}$$

atque hinc

$$ds = $$

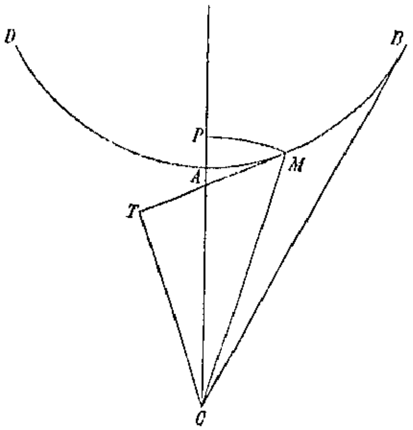


Fig. 52.

Si nunc in M
eamque ex centro
pendiculum CT, qu

$$\frac{ydy}{\sqrt{(y^2 - p}}$$

Quare habebitur

$$y^2 \int Pdy = (y^2 - p^2) a P^2 \quad \text{seu} \quad p^2 = y^2 - \frac{y^2 \int}{a}$$

aequatio pro curva quaesita. Q. E. I.

COROLLARIUM 1

423. In puncto A, ubi $\int Pdy$ evanescit, erit $p = y$,
normalis in curvam in eoque propterea celeritas corporis
A est punctum curvae centro C proximum.

COROLLARIUM 2

424. Si ponatur $p = 0$, habebitur punctum curvae B
curvam tangit. In eoque puncto, quod erit supremum
habebit. Invenitur vero punctum B ex hac aequatione a
y non poterit esse maior quam valor ex hac aequatione i

COROLLARIUM 3

425. Apparet etiam ex aequatione inventa $s = 2\sqrt{a \int}$
radicale signum ambiguum involvit, curvam duos habere
inter se similes et aequales et hanc ob rem oscillationes,
BAD fiunt, esse inter se aequales.

COROLLARIUM 4

26. Radius osculi in puncto A est $= \frac{2acP}{c-2aP}$. Et quia est $AC =$
empus, quo unus descensus super curvae AB portione infinite parv
itur, $= \pi\sqrt{a}$ (§ 207); huic igitur tempori omnes descensus erunt aequale
ob rem oscillationes, quae fiunt super curva BAD, isochronae erun
oscillationibus penduli in hypothesi gravitatis $= 1$, cuius longitud
$= 2a$.

EXEMPLUM 1

27. Sit vis centripeta directe proportionalis distantiis a centro, ut s
$\frac{y}{f}$; erit

$$\int Pdy = \frac{y^2-c^2}{2f}.$$

ergo erit

$$AM = s = \sqrt{\frac{2a(y^2-c^2)}{f}} \quad \text{atque} \quad p^2 = yy - \frac{f(yy-cc)}{2a}.$$

curvae radius osculi in puncto M, qui est $\frac{ydy}{dp}$, invenitur

$$= \frac{2a}{2a-f}\sqrt{\frac{(2a-f)y^2+fc^2}{2a}}.$$

uo sequitur, si fuerit $2a < f$, curvam versus centrum C fore convexa
xhibet figura. At si fuerit $2a = f$, curva evadet linea recta in A n
ad rectam AC. Punctum autem B, ubi CB tangit curvam, invenit
c aequatione

$$(f-2a)yy = ccf,$$

a fit

$$BC = \frac{c\sqrt{f}}{\sqrt{(f-2a)}}.$$

es ergo accidit, ut sit $f > 2a$ seu curva convexa versus C, habebit cu
dem in B. Atque in his casibus curva erit hypocyclois, quae generat
ione circuli, cuius diameter est

$$= \frac{c\sqrt{f}-c\sqrt{(f-2a)}}{\sqrt{(f-2a)}},$$

super concava parte circuli centro C radio

$$= \frac{c\sqrt{f}}{\sqrt{(f-2a)}}$$

descripti. Hoc ergo casu curvae tautochronae conveniun
chronis supra inventis (§ 390).

At si $2a > f$, quo casu curva est concava versus C,
et curva AM non amplius est hypocycloïs. Tum autem

$$p^2 = \frac{(2a-f)yy + ccf}{2a}.$$

unde p ubique praeter in A erit maior quam AC. Sit $c = 0$;
quare hoc casu curvae tautochronae erunt omnes spirales
centrum C descriptae. Corpus scilicet super spirali log
eodem tempore ad centrum C pertinget, ubicunque descen
igitur vis centripetae hypothesi tautochronae erunt: pri
cloides, deinde omnes lineae rectae utcunque ductae, te
logarithmicae et quarto infinitae curvae aliae hac ae
$p^2 = \frac{(2a-f)y^2+ccf}{2a}$, si quidem fuerit $2a > f$ et c non $= 0$.
centripetae hypothesi pro tautochronis tantum dederunt
TONUS in *Princ.*[1] et HERMANNUS in *Phoronomia* et Comm
A. 1727[2], quamvis hic aequationem aeque generalem ac

EXEMPLUM 2

428. Ponatur vis centripeta reciproce proportionalis qu
a centro, ut sit $P = \frac{ff}{yy}$; erit

$$\int Pdy = \frac{-ff}{y} + \frac{ff}{c} = \frac{ff(y-c)}{cy}.$$

Curva igitur AM erit

$$= 2f\sqrt{\frac{a(y-c)}{cy}} \quad \text{atque} \quad pp = \frac{acffyy + cy^3}{acff}$$

1) I. NEWTON, *Philosophiae naturalis principia mathematica*, Lo
positio LI, theorema XVIII. P. St.

2) IAC. HERMANN, *Phoronomia*, Amstelodami 1716, p. 89; *Theor*
nascuntur a potentiis quibusvis in corpora indesinenter agentibus, Comm
(1727), 1729, p. 139, vide praecipue p. 150. P. St.

le invenitur radius osculi

$$\frac{ydy}{dp} = \frac{2fy\sqrt{ac(acff+cy^3-y^4)}}{2acff+5cy^3-6y^4}$$

ergo p evanescit, ibi etiam radius osculi fit $=0$. Ipsius BC valor au
erietur ex hac aequatione $y^4 = cy^3 + acff$. Si igitur ponatur $BC = k$,
$\frac{k^4-ck^3}{cff}$, id quod assumi potest, quia k est quantitas arbitraria. Ceter
aret hanc curvam intra A et B habere posse punctum flexus contra
quod evenit, si curva in A est concava versus C, nempe si fuerit $2aff >$

EXEMPLUM 3

429. Sit vis centripeta ubique constans seu $P=1$; erit $\int Pdy = y$
re si centro C radio CM ducatur arcus MP, erit $\int Pdy = AP$ atque

$$\text{arcus } AM = 2\sqrt{a(y-c)} = 2\sqrt{a \cdot AP}.$$

erit porro

$$p^2 = y^2 - \frac{y^2(y-c)}{a} = \frac{(a+c)y^2 - y^3}{a},$$

e invenitur $BC = a+c$ et curva $AB = 2a = 2(BC - AC)$. Rad
uli vero in puncto M erit

$$= \frac{2y\sqrt{(a+c-y)a}}{2a+2c-3y}.$$

puncto ergo infimo A erit radius osculi $= \frac{2ac}{2a-c}$. Curva igitur in A
cava versus C, si $2a > c$, at convexa, si $c > 2a$, atque radius osculi in
infinite magnus, si $2a = c$. Primo casu, quo curva in A est conca
us C, curva habebit punctum flexus contrarii, ubi est

$$CM = \frac{2}{3}(a+c) = \frac{2}{3}BC.$$

st $c = 0$ ita ut punctum A in centrum C cadat, fiet y chorda hu
vae eritque $AM = 2\sqrt{ay}$, cuius curvae radius osculi in ipso centro C
ite parvus, atque est

$$p = y\sqrt{\frac{a-y}{a}};$$

a autem ipsa per quadraturam circuli potest construi.

PROPOSITIO 49

PROBLEMA

430. *Si corpus sollicitetur a potentiis quibuscunque,* (Fig. 53), *super qua omnes descensus ad punctum A* *temporibus.*

SOLUTIO

Quaecunque fuerint potentiae sollicitantes, eae om duas, quarum altera corpus perpetuo deorsum trahat vero horizontaliter secundu secundum MQ trahit, $= P$ MP trahit, $= Q$; dicantu $AM = s$ sitque celeritas in tudini b et celeritas in M d positis erit

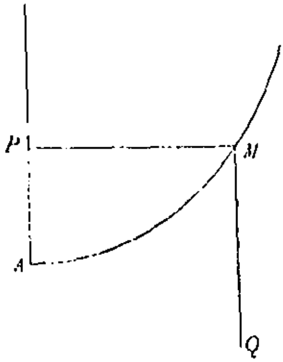


Fig. 53.

$$v = b - \int Pdx$$

Quare si ponatur $h = b$ erit v functio unius dimo et propterea $m = 1$ (§ 408). pro curva quaesita ista aequatio

$$s = 2\sqrt{az} = 2\sqrt{a}\left(\int Pdx + \int Qdy\right.$$

seu

$$ds = \frac{aPdx + aQdy}{\sqrt{a(\int Pdx + \int Qdy)}}.$$

At quia est $ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, erit

$$\frac{dy}{dx} = \frac{aPQ \pm \sqrt{(\int Pdx + \int Qdy)(aP^2 - \int Pdx -}}{\int Pdx + \int Qdy - aQ^2}$$

In ipso ergo principio A, ubi est $\int Pdx + \int Qdy = ($ seu $dy : dx = -P : Q$. Atque ut ex praecedentibus iusque descensus aequatur tempori, quo in hypothe dulum longitudinis $2a$ descensum absolvit. Q. E. I.

SCHOLION

431. Si habeatur curva, super qua omnes descensus fiunt eodem tempo[re, fa]cile erit dare curvas, super quibus oscillationes omnes eodem temp[ore per]agantur. Nam quia in vacuo ascensus similes sunt descensibus, om[nis cu]rva, quae est tautochrona pro descensibus, talis quoque erit pro asc[ensi]bus. Quare duae curvae tautochronae coniunctae in puncto A dab[unt cu]rvam, super qua omnes oscillationes sunt isochronae. Attamen hac rati[one mul]torum problema, quo curvae omnes oscillationes isochronas producen[tes re]quiruntur, non perfecte solvitur; dari enim possunt curvae infinitae [huic q]uaestioni satisfacientes, quarum tamen partes non sint aptae ad descen[sus so]los isochronos efficiendos. Problema autem hoc modo proponi potest: d[ata cu]rva quacunque invenire aliam, quae cum ea coniuncta producat om[nes os]cillationes aequidiurnas.[1]) Nunc vero antequam ad haec progrediamur, a[liud p]roblema proferemus, in quo quaeritur curva datae curvae adiungenda, [ut o]mnes descensus super hac curva composita absolvantur temporibus aeq[uali]bus. Quod problema ut maximo difficillimum mihi quondam erat pro[posi]tum a Cl. DAN. BERNOULLI.[2]) Attamen hac methodo, qua in investigati[one t]autochronarum utor, etiam istud problema resolvi potest.

PROPOSITIO 50

PROBLEMA

432. *In hypothesi gravitatis uniformis deorsum tendentis si detur c[urva] NB* (Fig. 54, p. 194), *invenire curvam BMF ei adiungendam, ut omnes desce[nsus s]uper hac curva composita ad A usque absolvantur aequalibus temporibus, in [quoc]unque curvae BMF puncto descensus incipiat.*

1) L. EULERI Commentatio 12 (indicis ENESTROEMIANI): *De innumerabilibus tautochron[is in v]acuo*, Comment. acad. sc. Petrop. 4 (1729), 1735, p. 49; *LEONHARDI EULERI Opera o[mnia, s]eries* II, vol. 4. P. St.

2) Vide L. EULERI Commentationem 24 (indicis ENESTROEMIANI): *Solutio singularis [casus ci]rca tautochronismum*, Comment. acad. sc. Petrop. 6 (1732/3), 1738, p. 28; *LEONHARDI E[ULERI O]pera omnia*, series II, vol. 4. P. St.

SOLUTIO

Si descensus incipiat in infimo curvae quaesitae p
fiet per datam curvam BNA tantum; eius ergo tempori,
aequalia esse debent omnium d
Sit $AD = a$, $AQ = u$, $AN = t$
inter u et t. Pro curva autem
et $BM = s$. Nunc in descensu q
in puncto B debita altitudini b;
debita altitudini $b - x$ atque co
altitudini $a + b - u$. Tempus
curvam incognitam est

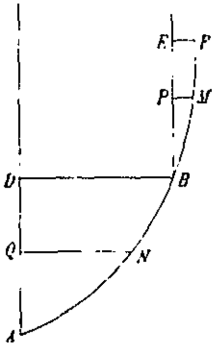


Fig. 54.

$$\int \frac{ds}{\sqrt{(b-x)}},$$

ita integratum, ut evanescat posito $x = 0$ et post integra
Tempus vero per curvam cognitam BNA erit

$$\int \frac{dt}{\sqrt{(a+b-u)}},$$

ita integratum, ut evanescat posito $u = 0$ atque post
$u = a$. Expressio ergo $\int \frac{ds}{\sqrt{(b-x)}}$, postquam factum est
comparata, ut, si addatur ad expressionem temporis per
penitus egrediatur littera b; tum enim totius tempus de
constans neque pendens a b seu a puncto curvae BM
incepit. Sit integrale

$$\int \frac{dt}{\sqrt{(a+b-u)}},$$

postquam positum est $u = a$, aequale huic seriei

$$k + \alpha b + \beta b^2 + \gamma b^3 + \delta b^4 + \text{etc.} + \zeta\sqrt{b} + \eta b\sqrt{b} + \theta b$$

Quare si descensus in puncto B incipiat, tempus toti
ob evanescentem b. Ipsi k ergo aequale esse debet te
per curvam compositam, in quocunque curvae BMF p

descensus. Sit nunc curvae quaesitae BMF natura sequente serie

$$ds = -Adx\sqrt{x} - Bxdx\sqrt{x} - Cx^2dx\sqrt{x} - Dx^3dx\sqrt{x} - \text{etc.}$$
$$-Fdx - Gxdx - Hx^2dx - Ix^3dx - \text{etc.}$$

Ponatur peripheriae ad diametrum ratio $\pi:1$, quae revera est $l-1:$ ita ut sit

$$\pi = -\frac{l-1}{\sqrt{-1}} = \sqrt{-1}\cdot l-1.$$

Est vero post integrationem posito $x = b$

$$\int\frac{Adx\sqrt{x}}{\sqrt{(b-x)}} = \frac{1}{2}\pi Ab, \quad \int\frac{Bxdx\sqrt{x}}{\sqrt{(b-x)}} = \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\pi Bb^2, \quad \int\frac{Cx^2dx\sqrt{x}}{\sqrt{(b-x)}} = \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\pi$$

atque

$$\int\frac{Fdx}{\sqrt{(b-x)}} = 2F\sqrt{b}, \quad \int\frac{Gxdx}{\sqrt{(b-x)}} = \frac{2}{3}2Gb\sqrt{b}, \quad \int\frac{Hx^2dx}{\sqrt{(b-x)}} = \frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}2Hb^2$$

Quo igitur horum terminorum cum illis terminis coniunctim ten BNA exprimentibus aggregatum aequetur ipsi k, termini homogenei ventes sese tollere debent. Fiet igitur

$$\frac{1}{2}\pi A = \alpha \quad \text{seu} \quad A = \frac{2}{1}\cdot\frac{\alpha}{\pi}$$

similique modo

$$B = \frac{2\cdot 4}{1\cdot 3}\cdot\frac{\beta}{\pi}, \quad C = \frac{2\cdot 4\cdot 6}{1\cdot 3\cdot 5}\cdot\frac{\gamma}{\pi} \quad \text{etc.}$$

atque

$$F = \frac{\zeta}{2}, \quad G = \frac{3}{2}\cdot\frac{\eta}{2}, \quad H = \frac{3\cdot 5}{2\cdot 4}\cdot\frac{\theta}{2}, \quad I = \frac{3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{\iota}{2} \quad \text{etc.}$$

Quamobrem, cum α, β, γ, δ etc., ζ, η, θ, ι etc. sint quantitates propter curvam ANB datam, habebitur pro curva quaesita BMF ista

$$ds = \frac{-dx}{\pi}\left(\frac{2}{1}\alpha\sqrt{x} + \frac{2\cdot 4}{1\cdot 3}\beta x\sqrt{x} + \frac{2\cdot 4\cdot 6}{1\cdot 3\cdot 5}\gamma x^2\sqrt{x} + \text{etc.}\right)$$
$$-\frac{dx}{2}\left(\zeta + \frac{3}{2}\eta x + \frac{3\cdot 5}{2\cdot 4}\theta x^2 + \frac{3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6}\iota x^3 + \text{etc.}\right),$$

cuius integralis est

$$s = \frac{-2}{\pi}\left(\frac{2}{3}\alpha x\sqrt{x} + \frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}\beta x^2\sqrt{x} + \frac{2\cdot 4\cdot 6}{3\cdot 5\cdot 7}\gamma x^3\right.$$
$$-\frac{1}{2}\left(\zeta x + \frac{3}{4}\eta x^2 + \frac{3\cdot 5}{4\cdot 6}\theta x^3 + \frac{3\cdot 5\cdot 7}{4\cdot 6\cdot 8}\iota x^4\right.$$

Cuius seriei hanc do constructionem: sumatur

$$\int\frac{dt}{\sqrt{(a-u)}} - \int\frac{dt}{\sqrt{(a+b-u)}},$$

ita ut evanescat posito $u = 0$; tum fiat $u = a$ et pro
ipsius b. Ponatur $x(1-z)$ loco b, et quod prodit, si
$\frac{Rdz}{\sqrt{z}}$, dum x ut constans consideretur, ita ut evanescat
ponatur $z = 1$ et prodibit functio ipsius x, quae erit

$$= \frac{\pi s}{\sqrt{x}}.$$

Hocque modo prodibit aequatio pro curva quaesita. C

SCHOLION 1

433. Constructio haec prorsus singularis, sed faci
ea methodo, qua usus sum in aequatione a C. Ricca
construenda[1]), atque hac potissimum gaudet praerogat
fuerit curva data, quaesita eius ope semper possit co
ipsa, quae pro curva invenitur, minime saepe tractari
statim aequationem finitam eam, quae alias ex summatio

COROLLARIUM 1

434. Si in aequatione pro curva BMF inventa p

$$ds = \frac{-\zeta dx}{2},$$

1) L. Euleri Commentatio 31 (indicis Enestroemiani): *Const*
$ax^n dx = dy + y^2 dx$, Comment. acad. sc. Petrop. 6 (1732/3),
Euleri Opera omnia, series I, vol. 22. P. St.

inatio curvae in B ad verticalem BP innotescit. Quo igitur appamodo hae duae curvae invicem cohaereant, oportet quoque positiogentis curvae ANB in B determinare.

COROLLARIUM 2

Sit $DQ = p$ et $BN = q$ (Fig. 54, p. 194); erit $dt = -dq$ et). Unde tempus per BNA erit $= \int \frac{dq}{\sqrt{(b+p)}}$ posito in hoc integrali Sit in ipso puncto B $dq = Ldp$; erit generatim $dq = Ldp + Pdp$ P tali functione ipsius p, quae evanescat posito $p = 0$. Videamus nescente p qualem terminum haec aequatio

$$\int \frac{dq}{\sqrt{(b+p)}} = \int \frac{Ldp}{\sqrt{(b+p)}}$$

Prodit autem posito $p = a$

$$2L\sqrt{(b+a)} - 2L\sqrt{b},$$

serie initio assumta prodit terminus $-2L\sqrt{b}$ [§ 436], qui convenit ; erit ergo

$$L = -\frac{\zeta}{2} \quad \text{et} \quad dq = \frac{-\zeta dp}{2}.$$

intelligitur curvam datam et quaesitam in puncto coniunctionis B m habere tangentem.

SCHOLION 2

Dixi $2L\sqrt{(b+a)} - 2L\sqrt{b}$ in serie dare hunc terminum $-2L\sqrt{b}$; $+ a)$ dat terminos hos $\sqrt{a} + \frac{b}{2\sqrt{a}} +$ etc. cum aliis comparandos. Hic lus terminus Ldp dat terminum huius formae $\zeta\sqrt{b}$. Quare ex eo le inclinatione curvae in B concludere licet.

SCHOLION 3

Constructio curvae quaesitae, quam dedi, etiam hoc modo immutari ribatur, postquam in integrali

$$\int \frac{dt}{\sqrt{(a-u)}} - \int \frac{dt}{\sqrt{(a+b-u)}}$$

positum est $u = a$, loco b hoc xz et vocato eo, quod

$$\frac{Rdz}{\sqrt{(1-z)}},$$

in quo x ut quantitas constans tractetur, ita ut ev
Tum ponatur $z = 1$ atque id, quod provenit, aequet
ratione plerumque commodius aequatio pro curva quaes

EXEMPLUM 1

438. Sit curva data ANB cyclois, ita ut sit

$$t = 2\sqrt{cu} \quad \text{seu} \quad dt = \frac{cdu}{\sqrt{cu}};$$

erit

$$\int \frac{dt}{\sqrt{(a-u)}} - \int \frac{dt}{\sqrt{(a+b-u)}} = \int \frac{du\sqrt{c}}{\sqrt{(au-u^2)}} - \int \frac{}{\sqrt{}}$$

$$= \sqrt{-c} \cdot l \frac{a - 2u - 2\sqrt{(u^2 - au)}}{a} - \sqrt{-c} \cdot l \frac{a + b - 2u -}{}$$

Ponatur $u = a$ et habebitur

$$\sqrt{-c} \cdot l - 1 - \sqrt{-c} \cdot l \frac{b - a - 2\sqrt{-a}}{a + b}$$

$$= \pi\sqrt{c} - 2\sqrt{-c} \cdot l\left(\sqrt{b} - \sqrt{-a}\right) + \sqrt{-c} \cdot l$$

$$= \pi\sqrt{c} + \sqrt{-c} \cdot l \frac{\sqrt{b} + \sqrt{-a}}{\sqrt{b} - \sqrt{-a}}.$$

Ponatur xz loco b et habebitur

$$R = \pi\sqrt{c} + \sqrt{-c} \cdot l \frac{\sqrt{xz} + \sqrt{-a}}{\sqrt{xz} - \sqrt{-a}};$$

quo multiplicato per

$$\frac{dz}{\sqrt{(1-z)}}$$

habebitur

$$\frac{\pi dz\sqrt{c}}{\sqrt{(1-z)}} + \frac{dz\sqrt{-c}}{\sqrt{(1-z)}} \cdot l \frac{\sqrt{xz} + \sqrt{-a}}{\sqrt{xz} - \sqrt{-a}},$$

ntegrale est

$$-2\pi\sqrt{c(1-z)}-2\sqrt{c(z-1)}\cdot l\frac{\sqrt{xz}+\sqrt{-a}}{\sqrt{xz}-\sqrt{-a}}-\frac{2\sqrt{-ac}}{\sqrt{x}}\cdot l\frac{\sqrt{(z-1)}+\sqrt{z}}{\sqrt{(z-1)}-\sqrt{z}}$$

$$\frac{2\sqrt{-c(a+x)}}{\sqrt{x}}\cdot l\frac{\sqrt{-a(1-z)}-\sqrt{z(a+x)}}{\sqrt{-a(1-z)}+\sqrt{z(a+x)}}+2\pi\sqrt{c}-2\sqrt{c}\sqrt{-1}\cdot l-1,$$

o ultimi termini sunt inter se aequales ob $\pi=\sqrt{-1}\cdot l-1$. Ponatur $z=1$; habebitur

$$\frac{-2\sqrt{ac}+2\sqrt{c(a+x)}}{\sqrt{x}}\pi,$$

aequale est ponendum ipsi $\frac{\pi s}{\sqrt{x}}\cdot$ Hinc provenit ista aequatio

$$s=-2\sqrt{ac}+2\sqrt{c(a+x)}$$

$$s+ANB=ANBM=2\sqrt{c}(AD+BP).$$

o patet curvam BMF esse continuationem datae AND, ita ut con- totam cycloidem constituant; id quod ex natura tautochronismi, cui satisfacere inventa est, per se sequitur.

EXEMPLUM 2

39. Sit linea data ANB recta ad horizontem utcunque inclinata; erit du atque

$$\frac{u}{-u)}-\int\frac{ndu}{\sqrt{(a+b-u)}}=2n\sqrt{a}-2n\sqrt{(a-u)}-2n\sqrt{(a+b)}+2n\sqrt{(a+b-u)}.$$

ur $u=a$ atque $b=xz$; erit

$$R=2n\sqrt{a}+2n\sqrt{xz}-2n\sqrt{(a+xz)}.$$

brem erit

$$\int\frac{Rdz}{\sqrt{(1-z)}}=2n\int\frac{dz\sqrt{a}}{\sqrt{(1-z)}}+2n\sqrt{x}\int\frac{dz\sqrt{z}}{\sqrt{(1-z)}}-2n\int\frac{dz\sqrt{(a+xz)}}{\sqrt{(1-z)}}$$

$$=4n\sqrt{a}-4n\sqrt{a(1-z)}+2n\sqrt{x}\int\frac{zdz}{\sqrt{(z-z^2)}}-2n\int\frac{adz+xzdz}{\sqrt{(a-az+xz-xz^2)}}.$$

Est vero

$$\int \frac{zdz}{\sqrt{(z-zz)}} = \frac{1}{2}\int \frac{dz}{\sqrt{(z-zz)}} - \sqrt{(z-zz)} =$$

postquam in integrali positum est $z=1$. At

$$\int \frac{adz+xzdz}{\sqrt{(a-az+xz-xz^2)}},$$

si post integrationem ponatur $z=1$, dat

$$\sqrt{a} + \frac{a+x}{2\sqrt{x}} A.\frac{2\sqrt{ax}}{a+x}$$

denotante $A.\frac{2\sqrt{ax}}{a+x}$ arcum circuli radii $=1$, cuius sinus es

$$\frac{\pi s}{\sqrt{x}} = 4n\sqrt{a} + n\pi\sqrt{x} - 2n\sqrt{a} - \frac{n(a+x)}{\sqrt{x}}$$

hincque

$$s = nx + \frac{2n\sqrt{ax}}{\pi} - \frac{n(a+x)}{\pi} A.\frac{2\sqrt{ax}}{a+x}$$

Huius aequationis differentialis est

$$ds = ndx - \frac{ndx}{\pi} A.\frac{2\sqrt{ax}}{a+x} = \frac{sdx+nadx}{a+x} - 2$$

Curva haec autem non ultra datam altitudinem poter usque, ubi erit $ds=dx$. Posito igitur $ds=dx$ erit

$$\frac{n-1}{n} = \frac{1}{\pi} A.\frac{2\sqrt{ax}}{a+x}.$$

Fiat ergo ut $n:n-1$ ita semiperipheria circuli, cuius r eiusdem circuli, cuius cosinus sit m; erit $\frac{a-x}{a+x}=m$ atqu fuerit angulus DAB 60°, erit $n=2$ et $m=0$ ide Ex quo sequitur, si angulus DAB fuerit maior q at si ille angulus minor fuerit quam 60°, fore $x<a$. C differentiali apparet, ut iam notavimus, in puncto B fo perpetuo fieri $ds<ndx$ usque in F, ubi est $ds=dx$.

COROLLARIUM 3

. Si linea recta BNA fuerit horizontalis, erit $n = \infty$ et $a = 0$. Si
it $n\sqrt{a} = \sqrt{f}$, erit

$$ds = \frac{s\,dx}{x} - \frac{2\,dx\sqrt{fx}}{\pi x}$$

atione differentiali inventa, cuius integrale est

$$\frac{s}{x} = \frac{-2}{\pi}\int\frac{dx\sqrt{f}}{x\sqrt{x}} = \frac{4\sqrt{f}}{\pi\sqrt{x}}$$

$$s = \frac{4}{\pi}\sqrt{fx}.$$

ergo erit cyclois, cuius infimum elementum curvae datae locum tenet.

COROLLARIUM 4

. Si aequatio differentialis

$$ds = n\,dx - \frac{n\,dx}{\pi}A.\frac{2\sqrt{ax}}{a+x}$$

lifferentietur posito dx constante, prodibit

$$dds = \frac{-na\,dx^2}{\pi(a+x)\sqrt{ax}}.$$

aequatione sequitur curvae in B radium osculi fore infinite parvum.

SCHOLION 4

2. Ex aequatione generali differentiali

$$ds = \frac{-dx}{\pi}\left(\frac{2}{1}\alpha\sqrt{x} + \frac{2\cdot 4}{1\cdot 3}\beta x\sqrt{x} + \text{etc.}\right) - \frac{dx}{2}\left(\zeta + \frac{3}{2}\eta x + \text{etc.}\right)$$

r semper fore $dds = \infty$ posito $x = 0$, nisi fuerit $\alpha = 0$. Quoties igitur
erit $\alpha = 0$, radius osculi curvae quaesitae in B erit $= 0$. At si fuerit
tum radius osculi curvae BMF in puncto B invenitur

$$= \frac{\zeta^2}{3\eta}\sqrt{\left(\frac{\zeta^2}{4} - 1\right)}.$$

o in quovis exemplo proposito statim radius osculi curvae in puncto
tescit.

EXEMPLUM 3

443. Si curva data ANB hanc habuerit aequationem, ut sit

$$dt = Cu^n du,$$

erit tempus per NA

$$= \int \frac{Cu^n du}{\sqrt{(a+b-u)}}.$$

Ponatur $a+b=f$ et $f-u=r^2$; erit $u=f-r^2$ et

$$u^n = f^n - \frac{n}{1} f^{n-1} r^2 + \frac{n \cdot n-1}{1 \cdot 2} f^{n-2} r^4 - \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2}{1 \cdot 2 \cdot 3} f^{n-3} r^6 + \text{etc.}$$

Cum vero sit

$$\frac{du}{\sqrt{(a+b-u)}} = -2dr,$$

erit

$$\int \frac{Cu^n du}{\sqrt{(a+b-u)}}$$

$$= \text{Const.} - 2C\Big(f^n r - \frac{n}{1 \cdot 3} f^{n-1} r^3 + \frac{n \cdot n-1}{1 \cdot 2 \cdot 5} f^{n-2} r^5 - \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7} f^{n-3} r^7 +$$

Quia autem haec quantitas evanescere debet facto $u=0$ seu $r=\sqrt{}$ quantitas illa constans addenda

$$= 2Cf^{n+\frac{1}{2}}\Big(1 - \frac{n}{1 \cdot 3} + \frac{n \cdot n-1}{1 \cdot 2 \cdot 5} - \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7} + \text{etc.}\Big).$$

Ponatur nunc $u=a$ seu $r=\sqrt{b}$ atque loco seriei

$$1 - \frac{n}{1 \cdot 3} + \frac{n \cdot n-1}{1 \cdot 2 \cdot 5} - \text{etc.}$$

ponatur N; prodibit totum descensus per BNA tempus

$$= 2CNf^{n+\frac{1}{2}}$$

$$- 2C\Big(f^n \sqrt{b} - \frac{n}{1 \cdot 3} f^{n-1} b\sqrt{b} + \frac{n \cdot n-1}{1 \cdot 2 \cdot 5} f^{n-2} b^2 \sqrt{b} - \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7} f^{n-3} b^3 \sqrt{b} +$$

restituatur $a+b$ loco f et orietur hoc tempus

$$=2CN\left\{\begin{array}{l} a^{n+\frac{1}{2}}+\frac{(2n+1)}{2}a^{n-\frac{1}{2}}b+\frac{(2n+1)(2n-1)}{2\cdot 4}a^{n-\frac{3}{2}}b^2 \\ \qquad +\frac{(2n+1)(2n-1)(2n-3)}{2\cdot 4\cdot 6}a^{n-\frac{5}{2}}b^3+\text{etc.}\end{array}\right\}$$

$$-2C\left\{\begin{array}{l} a^n\sqrt{b}+\frac{2n}{1\cdot 3}a^{n-1}b\sqrt{b}+\frac{2n(2n-2)}{1\cdot 3\cdot 5}a^{n-2}b^2\sqrt{b} \\ \qquad +\frac{2n(2n-2)(2n-4)}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}a^{n-3}b^3\sqrt{b}+\text{etc.}\end{array}\right\}.$$

Haec igitur series cum serie assumta hoc tempus exprimente comparata dat

$$k=2CNa^{n+\frac{1}{2}},\quad \alpha=\frac{2n+1}{2}2CNa^{n-\frac{1}{2}},\quad \beta=\frac{(2n+1)(2n-1)}{2\cdot 4}2CNa^{n-\frac{3}{2}},$$

$$\gamma=\frac{(2n+1)(2n-1)(2n-3)}{2\cdot 4\cdot 6}2CNa^{n-\frac{5}{2}}\text{ etc.},$$

$$\zeta=-2Ca^n,\quad \eta=\frac{-2n}{1\cdot 3}2Ca^{n-1},\quad \theta=\frac{-2n(2n-2)}{1\cdot 3\cdot 5}2Ca^{n-2}\text{ etc.}$$

Hinc oritur

$$ds=\frac{2CNa^n dx}{\pi}\left\{\begin{array}{l}\frac{(2n+1)\sqrt{x}}{1\cdot\sqrt{a}}+\frac{(2n+1)(2n-1)x\sqrt{x}}{1\cdot 3\cdot a\sqrt{a}} \\ +\frac{(2n+1)(2n-1)(2n-3)x^2\sqrt{x}}{1\cdot 3\cdot 5\cdot a^2\sqrt{a}}+\text{etc.}\end{array}\right\}$$

$$+Ca^n dx\left(1+\frac{nx}{1.a}+\frac{n(n-1)x^2}{1\cdot 2\cdot a^2}+\frac{n(n-1)(n-2)x^3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot a^3}+\text{etc.}\right).$$

Huius vero seriei posterioris summa est $Cdx(a+x)^n$ huiusque integralis

$$\frac{C(a+x)^{n+1}}{n+1}.$$

Quare post integrationem habebitur

$$s=\frac{C(a+x)^{n+1}-Ca^{n+1}}{n+1}$$

$$+\frac{4CNa^n\sqrt{x}}{\pi\sqrt{a}}\left(\frac{(2n+1)x}{3}+\frac{(2n+1)(2n-1)x^2}{3\cdot 5\cdot a}+\frac{(2n+1)(2n-1)(2n-3)x^3}{3\cdot 5\cdot 7\cdot a^2}+\text{etc.}\right)$$

Quae est aequatio pro curva quaesita BMF, quae
numero finito constat, quoties n fuerit terminus h
$\frac{5}{2}$ etc. Est vero

$$N = \int dp(1-pp)^n,$$

si post integrationem ponatur $p = 1$. Hacque facta

$$\int dp(1-pp)^{n+1} = \frac{2(n+1)}{2n+3}\int dp(1-$$

Quare si fuerit $n = -\frac{1}{2}$, quia est

$$\int \frac{dp}{\sqrt{(1-pp)}} = \frac{\pi}{2},$$

erit $N = \frac{\pi}{2}$; si $n = \frac{1}{2}$, erit $N = \frac{\pi}{4}$; si $n = \frac{3}{2}$, erit
$N = \frac{3\cdot 5\cdot \pi}{4\cdot 6\cdot 4}$; si $n = \frac{7}{2}$, erit $N = \frac{3\cdot 5\cdot 7\cdot \pi}{4\cdot 6\cdot 8\cdot 4}$ etc. At quia
erit, si $n = 1$, $N = \frac{2}{3}$; si $n = 2$, erit $N = \frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}$; si n
Ut si curva fuerit cyclois, erit $n = -\frac{1}{2}$ ideoque eri

$$s = 2C\sqrt{(a+x)} - 2C\sqrt{a},$$

ut supra invenimus (§ 438).

SCHOLION 5

444. Quando igitur est $dt = Cu^n du$, hic valor
ex ipsa methodi natura intelligitur, si dt aequetur
modi terminorum, tum s aequalem fore aggregato
minis productarum. Hac igitur ratione, si curva
series est quaerenda terminorum huius formae C
Atque ex iis omnibus debitus ipsius s valor obtinebi
lineae datae ANB haec

$$dt = \frac{du\sqrt{c}}{\sqrt{u}} + \frac{du\sqrt{u}}{\sqrt{c}},$$

...nus terminus dat $C = \sqrt{c}$ et $n = -\frac{1}{2}$, unde fit

$$s = 2\sqrt{c(a+x)} - 2\sqrt{ac};$$

...r terminus dat $C = \frac{1}{\sqrt{c}}$ et $n = \frac{1}{2}$ et $N = \frac{\pi}{4}$, unde oritur

$$s = \frac{2(a+x)^{\frac{3}{2}} - 2a\sqrt{a} - 2x\sqrt{x}}{3\sqrt{c}}.$$

...va quaesita ergo sequente aequatione exprimetur

$$s = \frac{2(a+3c+x)\sqrt{(a+x)} - 2(a+3c)\sqrt{a} - 2x\sqrt{x}}{3\sqrt{c}}.$$

EXEMPLUM 4

445. Sit curva data circulus diametri c; erit

$$dt = \frac{\frac{1}{2}cdu}{\sqrt{(cu - u^2)}} = \frac{1}{2}cdu\left(\frac{1}{\sqrt{cu}} + \frac{1\cdot\sqrt{u}}{2\cdot c\sqrt{c}} + \frac{1\cdot 3\cdot u\sqrt{u}}{2\cdot 4\cdot c^2\sqrt{c}} + \text{etc.}\right).$$

...to nunc quolibet termino seorsim et inveniatur valor ipsius ds; hab...
...r colligendis omnibus

$$ds = \frac{cdx}{2}\begin{Bmatrix} \frac{1}{\sqrt{c(a+x)}} + \frac{1\cdot\sqrt{(a+x)}}{2\cdot c\sqrt{c}} + \frac{1\cdot 3\cdot(a+x)^{\frac{3}{2}}}{2\cdot 4\cdot c^2\sqrt{c}} \text{ etc.} \\ -\frac{1\cdot\sqrt{x}}{2\cdot c\sqrt{c}} - \frac{1\cdot 3\cdot x\sqrt{x}}{2\cdot 4\cdot c^2\sqrt{c}} - \frac{3\cdot 1\cdot 3\cdot a\sqrt{x}}{2\cdot 2\cdot 4\cdot c^2\sqrt{c}} \text{ etc.} \end{Bmatrix}$$

...quibus sequens aequatio nascitur

$$\frac{2ds}{cdx} = \frac{1}{\sqrt{(a+x)(c-a-x)}} - \left(\frac{1}{\sqrt{(cx-x^2)}} - \frac{1}{\sqrt{cx}}\right)$$

$$-\frac{a}{1\cdot dx}d\left(\frac{1}{\sqrt{(cx-x^2)}} - \frac{1}{\sqrt{cx}} - \frac{1\cdot\sqrt{x}}{2\cdot c\sqrt{c}}\right)$$

$$-\frac{a^2}{1\cdot 2\cdot dx^2}dd\left(\frac{1}{\sqrt{(cx-x^2)}} - \frac{1}{\sqrt{cx}} - \frac{1\cdot\sqrt{x}}{2\cdot c\sqrt{c}} - \frac{1\cdot 3\cdot x\sqrt{x}}{2\cdot 4\cdot c^2\sqrt{c}}\right)$$

$$-\frac{a^3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot dx^3}d^3\left(\frac{1}{\sqrt{(cx-x^2)}} - \frac{1}{\sqrt{cx}} - \frac{1\cdot\sqrt{x}}{2\cdot c\sqrt{c}} - \frac{1\cdot 3\cdot x\sqrt{x}}{2\cdot 4\cdot c^2\sqrt{c}} - \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot x^2\sqrt{x}}{2\cdot 4\cdot 6\cdot c^3\sqrt{c}}\right) - \text{etc.}$$

...e expressio in multas alias formas transmutari potest.

PROBLEMA

446. *In hypothesi gravitatis uniformis deorsum* *quaecunque* AM (Fig. 55), *invenire curvam* AN *eiusm* *peraguntur super curva composita* MAN, *sint omnes i*

SOLUTIO

Sit datae curvae AM abscissa $AP = u$, arcus bitur ob curvam datam aequatio inter u et t. Dein

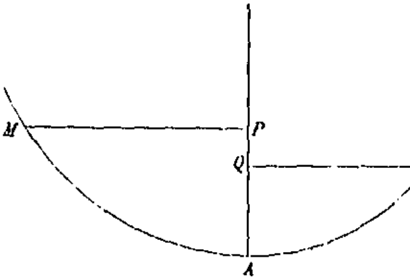


Fig. 56.

ponatur abscissa $AQ = x$ et arcus $AN = s$. Iam sit celeritas in puncto A debita altitudini b eritque

$$= \int \frac{dt}{\sqrt{(b-u)}} + \int \frac{ds}{\sqrt{(b-x)}}.$$

Atque si in hac expressione ponatur $u = b$ et $x =$ semioscillationis; quod cum debeat esse constans, c littera b prorsus evanescere debet. Ponatur

$$dt = \frac{du\sqrt{f}}{\sqrt{u}} + Pdu \quad \text{et} \quad ds = \frac{dx\sqrt{h}}{\sqrt{x}}$$

eritque tempus unius semioscillationis

$$= \int \frac{du\sqrt{f}}{\sqrt{(bu-u^2)}} + \int \frac{dx\sqrt{h}}{\sqrt{(bx-x^2)}} + \int \frac{Pdu}{\sqrt{(b-u}}$$

1) Vide L. EULERI Commentationem 12 (indicis ENESTROEM *tautochronis in vacuo*, Comment. acad. sc. Petrop. 4 (1729), *Opera omnia*, series II, vol. 4. P. St.

... ita fuerint comparata, ut sese destruant facta
$= b$, habebitur id, quod quaeritur; at P et Q tales necesse est
...ates, quae b non involvant, quia in aequationes curvarum ingre-
...t, erit

$$\int \frac{P\,du}{\sqrt{(b-u)}} - \int \frac{Q\,dx}{\sqrt{(b-x)}} = 0$$

... et $x = b$, si Q talis fuerit functio ipsius x, qualis P est ipsius u.
...ihil impediat, quo minus poni possit $x = u$, fiat $x = u$ oportebit
... P. Datur vero P ex aequatione curvae AM datae, quippe est

$$P = \frac{dt}{du} = \frac{\sqrt{f}}{\sqrt{u}}.$$

... curva quaesita haec habebitur aequatio

$$ds = \frac{du\sqrt{h}}{\sqrt{u}} - dt + \frac{du\sqrt{f}}{\sqrt{u}}$$

$$s + t = 2\sqrt{hu} + 2\sqrt{fu};$$

...atione determinatur natura curvae quaesitae AN. Q. E. I.

COROLLARIUM 1

...umta igitur $AP = u = x$ (Fig. 56), cum sit $AM = t$ et $AN = s$, erit

$$NA + MA = t + s = 2\left(\sqrt{f} + \sqrt{h}\right)\sqrt{AP},$$

Fig. 56

... arcuum eidem abscissae respondentium proportionalis est radici
... abscissa AP.

COROLLARIUM 2

448. Curva igitur quaesita AND ita debet e
arcuum $AM + AN$ aequalis sit arcui cycloidis e
dentis. Ex qua proprietate sponte fluit omnes os

COROLLARIUM 3

449. Tempus ergo unius oscillationis aequat
cycloide, cuius in infimo puncto radius osculi est 2
huius longitudinis producet semioscillationes min
nibus super curva MAN. Pendulum vero
peraget totas oscillationes isochronas.

COROLLARIUM 4

450. Quia quantitatem h pro lubitu accipere
satisfaciunt; atque etiam ea poterit determinari,
datae quantitatis. Ut si una oscillatio isochron
penduli longitudinis $\frac{L}{4}$, erit

$$L = 2\left(\sqrt{f} + \sqrt{h}\right)^2 \quad \text{ideoque} \quad \sqrt{h} = $$

Quare L maius esse debet quam $2f$.

COROLLARIUM 5

451. Si data curva AM fuerit cyclois seu d
erit quoque cyclois quaecunque; fit enim $ds = d$
huiusmodi cycloidibus non solum integrae oscillat
etiam singuli ascensus et descensus super qu
eodem tempore.

EXEMPLUM 1

452. Sit curva data AM recta utcunque ad
$dt = n\,du$; prodibit pro curva quaesita posito $\sqrt{\frac{L}{2}}$

$$ds = \frac{du\sqrt{L}}{\sqrt{2u}} - n\,du = \frac{dx\sqrt{L}}{\sqrt{2x}}$$

...etur $PN = y$, erit

$$dy = dx\sqrt{\left(\frac{L}{2x} - \frac{2n\sqrt{L}}{\sqrt{2x}} + n^2 - 1\right)},$$

...tat longitudinem penduli isochroni; ex qua aequatione curva ...erit construi. Curva autem in D habebit punctum reversionis ...ntem verticalem, quod habebitur sumendo $AC = \frac{L}{2(n+1)^2}$. Curvae ...o loco A radius osculi est $= L$.

...eterum notandum est, si $n = 1$, quo casu linea AM fit recta ...AC incidens, fore curvam quaesitam algebraicam; erit namque

$$dy = \frac{dx\sqrt{(L - 2\sqrt{2Lx})}}{\sqrt{2x}}.$$

...lia est

$$y = \frac{L}{3} - \frac{(\sqrt{L} - 2\sqrt{2x})\sqrt{(L - 2\sqrt{2Lx})}}{3}$$

$$9y^2 - 6Ly = -6L\sqrt{2Lx} + 24Lx - 16x\sqrt{2Lx},$$

...ationalitate prorsus liberata fit quatuor dimensionum. Huius ... D habebitur sumendo $AC = \frac{1}{8}L$, quo casu fit $CD = \frac{L}{3}$.

EXEMPLUM 2

... curva data AM circulus radii a; erit

$$dt = \frac{adu}{\sqrt{(2au - u^2)}}.$$

... $= \frac{L}{2}$ loco $\sqrt{f} + \sqrt{h}$ erit

$$ds = \frac{du\sqrt{L}}{\sqrt{2u}} - \frac{adu}{\sqrt{(2au - u^2)}} = \frac{dx\sqrt{L}}{\sqrt{2x}} - \frac{adx}{\sqrt{(2ax - x^2)}}.$$

...natione sequitur

$$dy = dx\sqrt{\left(\frac{L}{2x} - \frac{2a\sqrt{L}}{x\sqrt{(4a - 2x)}} + \frac{a^2}{2ax - xx} - 1\right)}.$$

Cuspis curvae AND erit, ubi est

$$\frac{\sqrt{L}}{\sqrt{2x}} = 1 + \frac{a}{\sqrt{(2ax - x^2)}}$$

seu

$$4x^4 + 2Lx^3 - 16ax^3 + L^2x^2 - 8aLx^2 \ldots$$
$$- 4aL^2x + 12a^2Lx - 16a^3x + 4a^2L^2 - 8 \ldots$$

Ponatur $L = a$; fiet

$$x = 0 \quad \text{et} \quad 4x^3 - 14ax^2 + 17a^2x \ldots$$

At si $L = 2a$, erit

$$x^4 - 3ax^3 + 5a^2x^2 - 2a^3x - a^4 \ldots$$

unde fit $x = a = AC$. Hocque casu longitudo pon…

SCHOLION

454. Si igitur efficiatur, ut pendulum in hu… oscillationes peragat, eius oscillationes aeque er… cycloide moveretur. Atque hanc ob rem quaecu… nismum adhiberi poterit. Restat in hoc negotio is… curvam datam comparatam esse oporteat, ut inve… continuam constituat, id quod sequente propositio…

1) Ex aequatione

$$\frac{\sqrt{L}}{\sqrt{2x}} = 1 + \frac{a}{\sqrt{(2ax - x^2)}}$$

sequitur

$$4x^4 - 4Lx^3 - 16ax^3 + L^2x^2 + 16aLx \ldots$$
$$- 4aL^2x - 12a^2Lx - 16a^3x + 4a^2L^2 - 8 \ldots$$

Posito $L = a$ fit

$$x = 0 \quad \text{et} \quad 4x^3 - 20ax^2 + 41a^2x - \ldots$$

at si $L = 2a$, erit

$$x^4 - 6ax^3 + 15a^2x^2 - 14a^3x + a \ldots$$

unde concluditur valorem $x = a$ problemati non satisfacere.

PROPOSITIO 52

PROBLEMA

hypothesi gravitatis uniformis deorsum tendentis invenire curvam N, super qua omnes semioscillationes absolvantur aequalibus temporibus.[1])

SOLUTIO

curva MAN (Fig. 56, p. 207) curva continua in eaque $AP = x$ $AN = s$. Assumatur nova indeterminata z atque x et t ita ut posita z affirmativa prodeat curvae pars AM, at posita z eat curvae pars AN. Quia nunc pro utraque parte x eundem m, debebit x talis esse functio ipsius z, quae eadem maneat, tive sumatur sive negative, seu x debet esse functio par de t eiusmodi esse debet functio ipsius z, ut prodeat s, si loco z. At quia arcus s in alteram partem axis cadit, eius ativus respectu curvae AM; quare, si in valore ipsius t ponatur edire debet $-s$. Sit nunc R functio impar ipsius z et S eius ponatur $t = R + S$; fiet $-s = -R + S$ seu $s = R - S$; unde fit Sit longitudo penduli isochroni $= a$; quia est $\sqrt{2a} = \sqrt{t} + \sqrt{h}$, $t + s = 2\sqrt{2ax}$ hincque erit $R = \sqrt{2ax}$ et $x = \frac{R^2}{2a}$. Quia t esse functio par ipsius z, ex hac expressione id per se n enim R sit functio impar, eius quadratum erit functio par. z; erit $z = \sqrt{2ax}$ atque S debebit esse functio par ipsius us $\sqrt{x}$. Quo facto habebitur ista aequatio

$$s = \sqrt{2ax} - S$$

curvis continuis tautochronis. Sit $dS = \frac{Tdx}{\sqrt{2ax}}$; erit T functio que ipsius $\sqrt{x}$. Quapropter fiet

$$ds = \frac{adx - Tdx}{\sqrt{2ax}}$$

EULERI Commentationem 12 (indicis ENESTROEMIANI): *De* ..., Comment. acad. sc. Petrop. 1 (1729), 1735, p. 49 ... *Opera omnia*, series II, vol. 4. P. St.

atque

$$dy = \frac{dx\sqrt{(a^2 - 2aT + T^2 - 2ax)}}{\sqrt{2ax}}$$

posito $PN = y$. Ex qua aequatione infinitae curva
reperiuntur. Q. E. I.

COROLLARIUM 1

456. Curva igitur hoc modo inventa AN est t
parte continua AM. Dantur vero per praecedens
curvae AM, quae cum AN coniunctae oscillationes

COROLLARIUM 2

457. Per praecedentem propositionem omnis c
aequatio

$$t = \sqrt{2cx} + S \quad \text{seu} \quad dt = \frac{c\,dx}{\sqrt{2cx}} +$$

oscillationes isochronas cum curva AN producit.
longitudo penduli isochroni est $= \frac{(\sqrt{a} + \sqrt{c})^2}{4}$.

COROLLARIUM 3

458. Inter has ergo infinitas curvas AM cum A
producentes ea est continua cum AN, in quae est
penduli isochroni fit $= a$, ut assumsimus.

COROLLARIUM 4

459. Si ponatur $c = 0$, erit cum curva AN
curva AM, cuius aequatio est

$$dt = \frac{T\,dx}{\sqrt{2ax}}$$

seu $t = S$. Hocque casu longitudo penduli est
$T = \sqrt{2bx}$, toties quoque linea recta cum AN taut
ita fuerit inclinata, ut anguli MAP secans sit $\sqrt{\frac{b}{a}}$

$-T$ debeat esse quantitas affirmativa, saltem in initio A. Si enim T ne finitum posito $x = 0$, id quod infinitis modis accidere potest, ita tamen, evanescat posito $x = 0$, curva AN in alteram axis AP partem caderet quo in A haberet cuspidem et corpus, postquam super MA descendit, flexionem super AN ascenderet, quod esset contra naturam oscillation

COROLLARIUM 6

461. Si igitur T evanescit posito $x = 0$, radius osculi in A, qui est $s = y$ in hoc loco erit $= a$ ideoque oscillationes congruent cum os tionibus minimis penduli longitudinis a, ut assumsimus.

COROLLARIUM 7

462. Curvae portio AN habebit in D tangentem verticalem ibi spidem; quod punctum invenitur ex hac aequatione

$$a - T = \sqrt{2ax}$$

mendo $AC =$ valori ipsius x ex hac aequatione. Altera quoque pars bebit cuspidem, si alicubi fuerit

$$a + T = \sqrt{2ax}.$$

COROLLARIUM 8

463. Si fuerit $S = 0$ et $T = 0$, erit $s = \sqrt{2ax}$. Quare curva erit cyc que portio AN aequalis et similis curvae AM. Est ergo cyclois ct ntinua, super qua omnes oscillationes absolvuntur eodem tempore.

EXEMPLUM

464. Sit $T = \sqrt{2bx}$, quo casu curva AN quoque est tautochrona cta AC angulum constituente, cuius cosinus est $\sqrt{\frac{a}{b}}$; erit

$$ds = \frac{adx - dx\sqrt{2bx}}{\sqrt{2ax}} \quad \text{atque} \quad s = \sqrt{2ax} - \frac{x\sqrt{b}}{\sqrt{a}}.$$

Habebitur autem

$$dy = \frac{dx\sqrt{(a^2 - 2a\sqrt{2bx} + 2bx - 2a}}{\sqrt{2ax}}$$

Quae aequatio etiam congruit cum ea, quam in p
pro curva invenimus, quae cum recta tautochronam
modo scribatur L pro a et n pro $\sqrt{\frac{b}{a}}$. Quare si fuer
algebraica invenitur NAM, quae est tautochrona, cui

$$dy = dx\sqrt{\frac{a - 2\sqrt{2ax}}{2x}}$$

et integralis haec

$$3y = a - (\sqrt{a} - 2\sqrt{2x})\sqrt{(a - 2\sqrt{2}$$

Quae est ea ipsa curva, quae cum recta verticali tau
supra invenimus (§ 452). Longitudo vero penduli isoch
in hac curva oscilletur. At si moveatur super recta
longitudo penduli isochroni erit $\frac{1}{4}a$. Atque si D fu
$AC = \frac{1}{8}a$, alter vero ramus AM in infinitum ascen
vam tautochronam algebraicam aliae vix inveniri pot

CAPUT TERTIUM

DE MOTU PUNCTI SUPER DATA LINEA IN MEDIO RESISTENTE

PROPOSITIO 53

PROBLEMA

. *Si corpus sollicitetur deorsum a potentia uniformi g in medio quocunque , determinare motum corporis descendentis super data curva AM* (Fig. 57) *onem, quam curva in singulis punctis sustinet.*

SOLUTIO

natur in verticali AP abscissa $AP = x$, applicata $PM = y$ et arcus s sitque altitudo celeritati corporis in M debita $= v$ et resistentia $= R$. Manifestum iam est ex capite praecedente [§ 93], si nulla esset ia, fore

$$dv = gdx.$$

tia vero minuit hoc celeritatis incre- et aequipollet vi tangentiali $= R$; solius effectus in hoc consisteret, ut

$$dv = -Rds.$$

rem si et potentia sollicitans g et re- R ambae simul in corpus agunt, erit

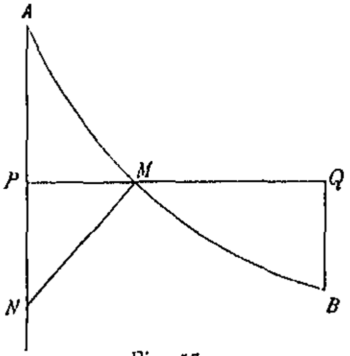


Fig. 57.

$$dv = gdx - Rds,$$

ex qua aequatione celeritas corporis in quovis puncto M
si corpus in A ex quiete descendat, integratio ita est i
$x = 0$ prodeat quoque $v = 0$. Verum si data cum cele
descensum inceperit, in integratione effici debet, ut
aequalis altitudini debitae illi celeritati initiali. Cum a
celeritas corporis, habebitur simul tempus, quo quivis a
sumendo $\int \frac{ds}{\sqrt{v}}$. Quod ad pressionem, quam curva in
curva in M duplici vi premitur, vi centrifuga scilicet et v
curvam esse convexam deorsum et elementum dx cons
radii osculi in contrariam partem normalis MN directi

$$= \frac{ds^3}{dxddy},$$

unde vis centrifuga erit

$$= \frac{2vdxddy}{ds^3},$$

qua curva secundum directionem MN premitur. Secu
directionem curva premetur a vi normali, quae est

$$= \frac{gdy}{ds};$$

vis normalis enim a potentia absoluta g tantum o
vis resistentiae est in tangente sita ideoque nullam vim
Consequenter tota vis, qua curva in M secundum direct
premitur, est

$$= \frac{gdy}{ds} + \frac{2vdxddy}{ds^3}.$$

Q. E. I.

COROLLARIUM 1

466. Expressio ergo vis curvam prementis congrui
vacuo invenimus [§ 83]. Neque tamen curva in medio
premitur qua in vacuo ob celeritatem, a qua vis contri
medio resistente variatur.

COROLLARIUM 2

467. In isto descensu corpus non ut in vacuo ma
tatem in puncto B, in quo tangens est horizontalis, sed

in quo corpus maximam habet celeritatem, invenitur ex hac aequatione

$$gdx = Rds \quad \text{seu} \quad \frac{dx}{ds} = \frac{R}{g}$$

in eo puncto, ubi sinus anguli, quem tangens curvae cum linea horizontali constituit, est ad sinum totum ut potentia absoluta g ad resistentiam R eo loco.

COROLLARIUM 3

468. Celeritas corporis igitur augetur usque ad hoc punctum, in quo celeritas est maxima; ultra vero hoc punctum celeritas iterum decrescit, quoniam Rds excedit gdx et hanc ob rem fit dv negativum.

COROLLARIUM 4

469. Si resistentia fuerit ut potestas quaecunque celeritatum, cuius exponens est $2m$, et si medium resistens fuerit uniforme, cuius exponens sit k, ubi k est altitudo celeritati debita, quacum corpus movetur, resistentiam patitur vi gravitati aequalem; hoc ergo casu erit

$$R = \frac{v^m}{k^m}$$

atque ista habebitur aequatio ad motum definiendum

$$dv = gdx - \frac{v^m ds}{k^m}.$$

COROLLARIUM 5

470. Sin autem abscissae in axe BQ capiantur fueritque $BQ = x$, $QM = y$ et $BM = s$, propter harum quantitatum differentialia negativa respectu priorum habebitur

$$dv = -gdx + Rds.$$

Quae aequatio ita est integranda, ut posito $x = 0$ fiat $v = b$, si quidem celeritas in B, quam corpus in hoc puncto obtinet, huic altitudini fuerit debita. At pressio secundum MN, quam curva sustinet, est

$$= \frac{gdy}{ds} - \frac{2vdxddy}{ds^3}.$$

COROLLARIUM 6

471. Si medium fuerit uniforme, cuius exponens sit functioni cuicunque ipsius v, quae sit V, proportionalis, functio ipsius k, qualis V est ipsius v; erit resistentia habebitur ista aequatio

$$dv = -gdx + \frac{Vds}{K}$$

sumto axe BQ.

SCHOLION 1

472. Formulam hic duplicem incrementum celeritatis pro duobus axibus AP et BQ, quia in sequentibus mox ha Scilicet quando descensus semper fit ex fixo puncto ut formula AP pro axe sumente. At si in eadem curva pl punctum fixum usque B sint considerandi, ut in motu osc posteriore formula utemur, in qua BQ pro axe habetur.

SCHOLION 2

473. Quia formula, ex qua motus corporis super data debet, ita est comparata, ut indeterminatae paucis cas separari queant, saepe ex ea nihil, quod ad motum spec Quamobrem eos tantum casus evolvere convenit, quibus ac

$$dv = \pm gdx \mp \frac{Vds}{K}$$

vel separari vel integrari potest. Hi autem casus omn generales reducentur. Primus est, quando linea, super q est recta; tum enim ob $ds = ndx$ aequatio transit in han

$$\frac{\pm Kdv}{gK - nV} = dx,$$

in qua indeterminatae sunt a se invicem separatae. S quando in V unicam tantum obtinet dimensionem v; t integrationem admittit Tertius casus est, quando tam v

urva ita est comparata, ut in aequatione v et x ubique eundem dimension umerum constituant; tum enim per regulam notam BERNOULLIANAM[1]) inde inatae a se invicem possunt separari. Hoc autem evenit, si in Vds u erit dimensio ipsarum v et x. Praeter hos quidem casus essent duo tegrationem admittentes, sed qui huc non pertinent. Primus est, si r entia *evanescit, qui vero casus in praecedente* capite iam sufficienter ertractatus. Alter casus est, si potentia sollicitans g evanescit; de tem non est opus, ut agamus, quia motus super quacunque linea cong m motu super linea recta, de quo in praecedente libro iam satis est dict raeterea quoque multis casibus aequatio separationem admittit, si fu $= v^2$, quoties scilicet aequatio pro curva ita est comparata, ut aequa casum aequationis, quam quondam Com. RICCATI proposuit, potest red eneraliter vero etiam potest in hoc casu celeritas per seriem exhiberi at ita expressione definiri, quemadmodum ego generalem aequationis RICCATIA di constructionem.[2]) Quoties igitur natura rei requiret, praeter tres ca positos subinde quoque hunc casum, in quo resistentia biquadrato cel tis est proportionalis, evolvemus.

SCHOLION 3

474. Quia haec de motu in medio resistente tractatio per se est d is et intricata, non ad plures vis sollicitantis hypotheses, ut capite pr dente fecimus, eam accommodabimus, sed nobis perpetuo potentia sollicit it uniformis et deorsum directa neque de viribus centripetis multum eri llicii. Atque cum potentia sollicitans ponatur *uniformis, medium resist* oque tale poni conveniet; fluidum enim, quod resistentiam generat, ips rporis gravitatem minuit, et si id non esset uniforme, potentia absol n recte uniformis poneretur. Deinde etiam propter eandem rationem c m, in qua corpus movetur, totam in eodem plano positam assumemus, altas difficultates nullam utilitatem afferentes removeamus.

1) IOH. BERNOULLI, *De integrationibus aequationum differentialium, ubi traditur methodi us specimen integrandi sine praevia separatione indeterminatarum*, Comment. acad. sc. Petro 726), 1728, p. 167; *Opera omnia* Tom. 3, Lausannae et Genevae 1742, p. 108. P. St.

2) Vide notam p. 196. P. St.

PROPOSITIO 54

PROBLEMA

475. *Si corpus perpetuo sollicitetur deorsum a potent*
quocunque resistente, determinare motum corporis super d
ascendentis et pressionem, quam curva in singulis punctis

SOLUTIO

In verticali AP posita abscissa $AP = x$, $PM =$
tudo celeritati in A debita $= b$ eique in M debita $=$
$M = R$. Erit igitur,
tam potentia sollicitans
motui contraria. Han
modo quo in praeceden

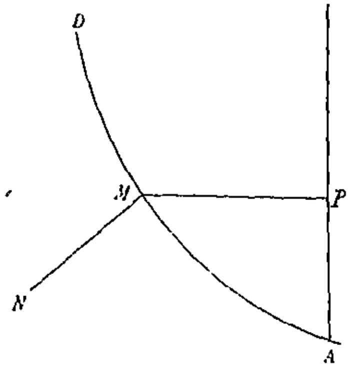


Fig. 58.

$$dv = -g$$

Ex qua aequatione v
ut facto $x = 0$ fiat
resistentia in pressione
tur, non ingrediatur,
tota, quam curva in M
normalis MN sustinet,

$$= \frac{gdy}{ds} - \frac{2vdxddy}{ds^3}$$

posito dx constante; ubi $\frac{gdy}{ds}$ denotat vim normalem et
fugam, utramque iuxta MN directam. Q. E. I.

COROLLARIUM 1

476. In ascensu corporis ergo super quacunque
perpetuo imminuitur atque punctum curvae D reper
ascendentis celeritas evanescit, si in aequatione d
integrationem ponatur $v = 0$.

COROLLARIUM 2

7. Si corpus super curva DMA descenderet, haberetur ista aequatio

$$dv = -gdx + Rds$$

ex qua intelligitur ascensum non esse similem descensui ut in vacuo. resistentia fieret negativa seu accelerans, tum ascensus similis foret ui. Quare descensus in medio resistente congruet cum ascensu in antumdem accelerante et vicissim.

COROLLARIUM 3

8. Quoniam aequatio pro ascensu hoc tantum differt ab aequatione scensu, quod resistentia R valorem induat negativum, intelligitur casibus, quibus aequatio pro descensu separari vel integrari potest, quoque aequationem pro ascensu simili modo tractari posse.

COROLLARIUM 4

). Si fuerit $R = \frac{V}{K}$, erit pro ascensu super curva AM haec aequatio

$$dv = -gdx - \frac{Vds}{K}.$$

descensu habetur

$$dv = -gdx + \frac{Vds}{K}.$$

si illa aequatio poterit integrari, simul quoque huius aequationis ur integrale ponendo tantum $-K$ loco K.

alia problemata, in quibus harum quatuor rerum — resistentiae, sioues et curvae — duae dantur, reliquae duae requiruntur. Habeb quoque problemata indeterminata, quibus omnes curvae requi quibus corpus descendens vel eandem celeritatem acquirit ve tempore absolvit. Tum sequetur doctrina de lineis brachystoc tandem caput concludet de motu oscillatorio tractatio.

PROPOSITIO 55

PROBLEMA

481. *In medio resistente uniformi quocunque et hypothesi gravita determinare motum corporis descendentis super linea recta AMB* (Fi *zontem utcunque inclinata.*

SOLUTIO

Posita $AP = x$ erit $AM = s = nx$; et quia medium resis forme, erit resistentia $R = \frac{V}{K}$. Posita ergo altitudine celeritati

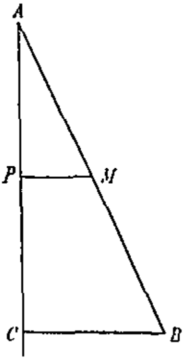


Fig. 69.

$= v$ erit

$$dv = g\,dx - \frac{nV\,dx}{K}$$

(§ 465). Unde fit

$$\frac{K\,dv}{gK - nV} = dx,$$

in qua aequatione indeterminatae sunt a se ratae; erit ergo

$$x = \int \frac{K\,dv}{gK - nV},$$

in qua integratione efficiendum est, ut posi $v = 0$, si quidem descensus in A ex quiete incipiat. Sin vero tatem initialem, haec per integrationem est introducenda. spatium AM est

$$= \int \frac{n\,dx}{\sqrt{v}}.$$

Posito ergo loco dx eius valore in v habebitur tempus per AM

$$= \int \frac{nK\,dv}{(gK - nV)\sqrt{v}},$$

tegrale ita est sumendum, ut posita $Vv =$ celeritati initiali in A t. Pressio vero, quam linea in quovis puncto M sustinet, est con- ompe aequalis vi normali

$$= \frac{g\,dy}{ds} = \frac{g\sqrt{(n^2-1)}}{n},$$

centrifuga evanescit ob $ddy = 0$. Q. E. I.

COROLLARIUM 1

. Celeritas corporis ergo tam diu acceleratur, quam diu est $gK > nV$. emel fuerit $gK = nV$, corpus neque accelerabitur neque retardabitur. tur vero corporis celeritas, si in initio A fuerit $nV > gK$.

COROLLARIUM 2

. Si ergo corpus in A descensum a quiete incipiat, motus perpetuo ita tamen, ut semper sit $gK > nV$, quippe quae est ultima celeritas, escensu per infinitum spatium demum acquirit.

COROLLARIUM 3

. Quo maior ergo est angulus BAC, eo minor est ultima, quam acquirere potest, celeritas. Maximam vero celeritatem ultimam, qua iter progreditur, acquirit descensu super recta verticali AC.

COROLLARIUM 4

. Si resistentia fuerit ut potestas indicis $2m$ celeritatum, erit $V = v^m$ k^m, unde ista habebitur aequatio

$$x = \int \frac{k^m\,dv}{gk^m - nv^m}$$

empus per AM

$$= \int \frac{nk^m\,dv}{(gk^m - nv^m)\sqrt{v}}.$$

EXEMPLUM 1

486. Resistat medium in simplici ratione celeritat

$$dv = g\,dx - \frac{n\,dx\sqrt{v}}{\sqrt{k}}.$$

Hinc fit

$$x = \int \frac{dv\sqrt{k}}{g\sqrt{k} - n\sqrt{v}} = -\frac{2\sqrt{kv}}{n} + \frac{2gk}{n^2}\, l\, \frac{g}{g\sqrt{k}}$$

vel per seriem

$$x = \frac{2v}{2g} + \frac{2nv\sqrt{v}}{3g^2\sqrt{k}} + \frac{2n^2v^2}{4g^3k} + \frac{2n^3v^2\sqrt{v}}{5g^4k\sqrt{k}} +$$

si quidem descensus in A ex quiete incipiat. Temp
AM erit

$$= \int \frac{n\,dv\sqrt{k}}{g\sqrt{kv} - nv} = 2\sqrt{k}\, l\, \frac{g\sqrt{k}}{g\sqrt{k} - n\sqrt{}}$$

Quare si tempus per AM ponatur $= t$, erit

$$nx + 2\sqrt{kv} = \frac{gt\sqrt{k}}{n}$$

atque in serie

$$t = \frac{2n\sqrt{v}}{g} + \frac{2n^2v}{2g^2\sqrt{k}} + \frac{2n^3v\sqrt{v}}{3g^3k} + \frac{2n^4v^2}{4g^4k\sqrt{k}}$$

Si ergo corpus in descensu per AB acquisivit celeritat
ex hac reperitur altitudo

$$AC = -\frac{2\sqrt{bk}}{n} + \frac{2gk}{n^2}\, l\, \frac{g\sqrt{k}}{g\sqrt{k} - n\sqrt{}}$$

EXEMPLUM 2

487. Resistat medium in duplicata ratione celeri

$$x = \int \frac{k\,dv}{gk - nv} = \frac{k}{n}\, l\, \frac{gk}{gk - nv},$$

si quidem corpus in A ex quiete ascensum incho
numerus, cuius logarithmus est unitas, erit

$$e^{\frac{nx}{k}} = \frac{gk}{gk - nv} \quad \text{atque} \quad v = \frac{gk\left(e^{\frac{nx}{k}} - 1\right)}{ne^{\frac{nx}{k}}} = \frac{gk}{n}\left(1 - e^{\frac{-nx}{k}}\right).$$

rem, si corpus in B habuerit celeritatem altitudini b debitam, erit

$$AC = \frac{k}{n} l \frac{gk}{gk - nb}.$$

corpus per spatium infinitum descendat, habebit celeritatem altitu-lebitam. Tempus vero per spatium AM erit

$$-\int \frac{nkdv}{(gk - nv)\sqrt{v}} = \frac{\sqrt{nk}}{\sqrt{g}} l \frac{\sqrt{gk} + \sqrt{nv}}{\sqrt{gk} - \sqrt{nv}}.$$

series tam spatium x quam tempus commode exprimitur; id quod er pro quovis valore litterae m in sequente exemplo monstrabimus.

EXEMPLUM 3

Sit resistentia ut potestas exponentis $2m$ celeritatum; erit

$$dx = \frac{k^m dv}{gk^m - nv^m};$$

pressio in seriem conversa dat

$$dx = \frac{dv}{g} + \frac{nv^m dv}{g^2 k^m} + \frac{n^2 v^{2m} dv}{g^3 k^{2m}} + \text{etc.}$$

invenitur

$$x = \frac{v}{g} + \frac{nv^{m+1}}{(m+1)g^2 k^m} + \frac{n^2 v^{2m+1}}{(2m+1)g^3 k^{2m}} + \frac{n^3 v^{3m+1}}{(3m+1)g^4 k^{3m}} + \text{etc.}$$

i ponatur tempus per $AM = t$, quia est

$$dt = \frac{ndx}{\sqrt{v}},$$

$$t = \frac{2n\sqrt{v}}{g} + \frac{2n^2 v^m \sqrt{v}}{(2m+1)g^2 k^m} + \frac{2n^3 v^{2m}\sqrt{v}}{(4m+1)g^3 k^{2m}} + \frac{2n^4 v^{3m}\sqrt{v}}{(6m+1)g^4 k^{3m}} + \text{etc.}$$

PROBLEMA

489. *Resistat medium in ratione quacunque multipli*
sit punctum A (Fig. 60), *ex quo infinitae rectae AM*
curvam CMD huiusmodi, ut corpus per quamlibet re
puncto M eandem habeat celeritatem.

SOLUTIO

Sit $2m$ exponens potestatis celeritatis, cui resist
dicaturque $AP = x$ et $AM = z$ et ponatur $z = nx$. S
M debita $= v$, quae debet esse
Erit ergo

$$dx = \frac{k^m dv}{gk^m - }$$

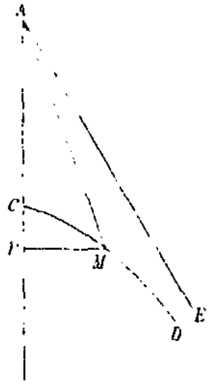


Fig. 60

(§ 485) denotante ut supra k c
et g potentiam sollicitantem de
naturam curvae CM ergo inv
grare aequationem

$$dx = \frac{k^m dv}{gk^m - n}$$

ita ut posito $v = 0$ fiat quoque $x = 0$, tum autem pon
n, hocque modo obtinebitur aequatio inter x et z nat
Per seriem autem supra aequationem propositam inte
posito b loco v habebimus

$$x = \frac{b}{g} + \frac{nb^{m+1}}{(m+1)g^2k^m} + \frac{n^2b^{2m+1}}{(2m+1)g^3k^{2m}}$$

Ponatur q^m loco n et multiplicetur ubique per q; quo

$$qx = \frac{bq}{g} + \frac{b^{m+1}q^{m+1}}{(m+1)g^2k^m} + \frac{b^{2m+1}q^{2m+1}}{(2m+1)g^3k^{2m}}$$

ntur differentialia et dividatur per bdq; habebitur

$$\frac{qdx+xdq}{bdq} = \frac{1}{g} + \frac{b^m q^m}{g^2 k^m} + \frac{b^{2m} q^{2m}}{g^3 k^{2m}} + \text{etc.} = \frac{k^m}{gk^m - b^m q^m}$$

$$qdx + xdq = \frac{bk^m dq}{gk^m - b^m q^m}.$$

nia est $q^m = n$ et $n = \frac{z}{x}$, ponatur $\frac{z^{\frac{1}{m}}}{x^{\frac{1}{m}}}$ loco q et prodibit

$$z^{\frac{1-m}{m}} x^{\frac{m-1}{m}} dz + (m-1) z^{\frac{1}{m}} x^{\frac{-1}{m}} dx = \frac{bk^m z^{\frac{1-m}{m}} x^{\frac{m-1}{m}} dz - bk^m z^{\frac{1}{m}} x^{\frac{-1}{m}} dx}{gk^m x - b^m z}.$$

multiplicata per $x^{\frac{1}{m}} z^{\frac{m-1}{m}}$ abit in hanc

$$xdz + (m-1)zdx = \frac{bk^m xdz - bk^m zdx}{gk^m x - b^m z}.$$

ructio autem curvae facilius sequitur ex aequatione

$$qx = \int \frac{bk^m dq}{gk^m - b^m q^m}.$$

autem habuimus seriem ipsi qx aequalem, ex qua patet, si fuerit $\frac{gk^m}{b^m}$, tum $\frac{gx}{b}$ aequari seriei harmonicae

$$1 + \frac{1}{m+1} + \frac{1}{2m+1} + \text{etc.}$$

uo esse x infinitum. Si igitur x est infinitum, erit

$$q^m = \frac{z}{x} = \frac{gk^m}{b^m},$$

uo perspicitur rectam AE fore curvae asymtoton et cosinum anguli fore $= \frac{b^m}{gk^m}$. Verticis autem curvae C a puncto A distantia AC aequalis uic seriei

$$\frac{b}{g} + \frac{b^{m+1}}{(m+1)g^2 k^m} + \frac{b^{2m+1}}{(2m+1)g^3 k^{2m}} + \text{etc.}$$

t autem esse necessario $b^m < gk^m$; alias enim vertex C a puncto A in- distaret. Q. E. I.

COROLLARIUM 1

490. Si applicata PM vocetur y, erit

$$z = \sqrt{(x^2 + y^2)} \quad \text{et} \quad dz = \frac{xdx + y\ldots}{\sqrt{(x^2 + y\ldots}}$$

quibus valoribus in aequatione inventa substitutis hab

$$xydy + mx^2dx + (m-1)y^2dx = \frac{bk^m y(xd\ldots}{gk^m x - b^m\ldots}$$

COROLLARIUM 2

491. Ponatur in hac aequatione $y = px$; trans
in hanc

$$xpdp + mdx + mp^2dx = \frac{bk^m pdp\ldots}{gk^m - b^m\sqrt{(1\ldots}}$$

quae aequatio per $(1+pp)^{\frac{1-2m}{2m}}$ multiplicata fit integr

$$m(1+pp)^{\frac{1}{2m}}x = \int \frac{bk^m pdp(1+pp)^{\frac{1-\ldots}{\ldots}}}{gk^m - b^m\sqrt{(1+p\ldots}}$$

quae expressio per quadraturas effici potest.

COROLLARIUM 3

492. Si resistentia evanescat corpusque in vac
finitum; atque ex supra data serie invenitur $qx = \frac{bq}{g}$
scitur lineam CM fieri rectam horizontalem.

SCHOLION 1

493. Quia autem ex hac aequatione generali
curvae potest concludi, in exemplis specialibus han
prosequemur. Talia autem assumemus exempla, in
integrationem saltem per logarithmos admittit, qu
perveniamus, ex quibus facile erit curvae naturam p

1) Ex hac paragrapho concludi potest EULERO formulam Co
fuisse. P. St.

EXEMPLUM 1

Sit igitur resistentia ipsis celeritatibus proportionalis; erit $m = \frac{1}{2}$.
$AC = a$; quia celeritas, quam corpus per AC cadendo acquirit, de-
debet altitudini b, erit

$$a = -2\sqrt{bk} + 2gkl\frac{g\sqrt{k}}{g\sqrt{k} - \sqrt{b}}$$

Deinde vero erit

$$\sqrt{q} = \frac{z}{x} \quad \text{seu} \quad q = \frac{z^2}{x^2}$$

$$qx = \int \frac{bdq\sqrt{k}}{g\sqrt{k} - \sqrt{bq}},$$

egrale ita est accipiendum, ut posito $z = x$ seu $q = 1$ fiat $x = a$ vel
ori assignato. Erit ergo

$$qx = -2\sqrt{bkq} + 2gkl\frac{g\sqrt{k}}{g\sqrt{k} - \sqrt{bq}},$$

quatio loco q substituto $\frac{z^2}{x^2}$ abit in hanc

$$z^2 = -2z\sqrt{bk} + 2gkxl\frac{gx\sqrt{k}}{gx\sqrt{k} - z\sqrt{b}}.$$

, fit

$$x = a = -2\sqrt{bk} + 2gkl\frac{g\sqrt{k}}{g\sqrt{k} - \sqrt{b}}.$$

em $q = 1 + dq$; habebitur

$$dx + xdq = -dq\sqrt{bk} + \frac{gkdq\sqrt{b}}{g\sqrt{k} - \sqrt{b}} = \frac{bdq\sqrt{k}}{g\sqrt{k} - \sqrt{b}}.$$

$\frac{1}{\sqrt{q}}$ est cosinus anguli MAC, erit $\sqrt{dq}$ = sinui huius anguli. Quam-
ncrementum ipsius x infinities minus est quam incrementum anguli
ncidente MA in CA, ex quo sequitur tangentem curvae in C esse
alem; huiusque curvae tangens in infinito seu asymtota erit AE
anguli EAC cosinu $\frac{\sqrt{b}}{g\sqrt{k}}$. Ceterum haec curva ex altera verticalis
te arcum habebit similem et aequalem ipsi CMD.

SCHOLION 2

495. Generaliter quidem etiam ostendi p
esse debere horizontalem. Posita enim $n = 1$ i

$$AC = \frac{b}{g} + \frac{b^{m+1}}{(m+1)g^2k^m} -$$

Augeatur n elemento dn; habebitur incrementun

$$= \frac{b^{m+1}dn}{(m+1)g^2k^m} + \frac{2b^{2m+1}ndn}{(2m+1)g^3k}$$

Est vero $\frac{1}{n}$ cosinus anguli MAC ideoque sin
$1 + dn$ loco n. Quamobrem incrementum ips
quam incrementum anguli; atque ideo AC norn

EXEMPLUM 2

496. Sit resistentia quadratis celeritatum
positoque $AC = a$ erit

$$a = kl\frac{gk}{gk - b} \quad \text{atque} \quad b = gk$$

Deinde vero est

$$q = n = \frac{z}{x}$$

atque

$$qx = z = \int \frac{bkdq}{gk - bq} = kl\frac{gk}{gk - bq}$$

Habebitur ergo

$$e^{\frac{z}{k}} = \frac{gkx}{gkx - bz},$$

unde sequitur

$$x = \frac{e^{\frac{z}{k}}bz}{gk\left(e^{\frac{z}{k}} - 1\right)} = \frac{e^{\frac{z}{k}}z\left(e^{\frac{a}{k}}\right.}{e^{\frac{a}{k}}\left(e^{\frac{z}{k}}\right.}$$

posito loco b eius valore in a. Ad curvam
dissime adhibetur haec aequatio

$$z = kl\frac{gk}{gk - bq},$$

in qua z est AM et q est secans anguli MAC.

SCHOLION 3

97. In solutione problematis ad inveniendam aequationem curvae CMD imus seriei cuiusdam summatione; eandem vero aequationem sine serie- equenti modo elicere licet. Quia est

$$x = \int \frac{k^m dv}{gk^m - nv^m},$$

ipsa aequatio exprimit naturam curvae quaesitae, si post integra- n ponatur $v = b$ et $\frac{z}{x}$ loco n. Quamobrem si

$$\int \frac{k^m dv}{gk^m - nv^m}$$

entietur, posito non solum v, sed etiam n variabili, atque tum ponatur stans $= b$ et $\frac{z}{x}$ loco n, habebitur aequatio differentialis pro curva quae- Ad hoc efficiendum pono $n = \frac{1}{p^m}$, quo prodeat

$$x = \int \frac{k^m p^m dv}{gk^m p^m - v^m}.$$

nus brevitatis gratia

$$\frac{k^m p^m}{gk^m p^m - v^m} = P$$

e aequatio differentialis haec

$$dx = Pdv + Qdp,$$

am p variabilis accipiatur. Quia autem P est functio nullius dimensi- ipsarum v et p, erit

$$x = Pv + Qp$$

uo

$$Q = \frac{x}{p} - \frac{Pv}{p}.$$

igitur loco Q valore substituto prodibit

$$pdx = \frac{k^m p^{m+1} dv - k^m p^m v dp}{gk^m p^m - v^m} + xdp.$$

tuatur $n^{\frac{-1}{m}}$ loco p et orietur

$$mndx + xdn = \frac{mk^m ndv + k^m vdn}{gk^m - nv^m},$$

in qua aequatione n aeque variabilis est assumta
$v = b$, $dv = 0$ et $n = \frac{z}{x}$ atque habebitur ista aequ

$$xdz + (m-1)zdx = \frac{bk^m(xdz}{gk^m x -}$$

quae cum aequatione supra inventa congruit.

PROPOSITIO 57

PROBLEMA

498. *Si resistentia fuerit in quacunque multipl* *venire curvam AMC* (Fig. 61) *huius proprietatis,* *quavis subtensa AM dato tempore ex A ad M perve*

SOLUTIO

Ducta verticali AC ponatur $AP = x$, AM altitudine celeritati in M debita $= v$ et resiste

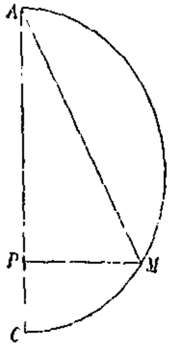


Fig. 61.

corpus per AM descendit, $=$ constans. Habebimus ergo ex

$$x = \int \frac{k^m dv}{gk^m - nv^m} \quad \text{et}$$

(§ 485). Quocirca ad naturam opus est, ut utraque aequat integretur et valor ipsius v ex substituatur atque tum loco habebitur aequatio inter x et z naturam curvae integrationes non commode perfici poterunt, utraqu ponendo quoque n variabili, et postquam positum tionibus inventis eliminari debet v, quo prodea

continens, quae ob $n = \frac{z}{x}$ exhibebit naturam curvae quaesitae. Ad hoc natur $n = \frac{1}{p^m}$, quo habeamus

$$x = \int \frac{k^m p^m dv}{gk^m p^m - v^m} \quad \text{et} \quad t = \int \frac{k^m dv}{(gk^m p^m - v^m)\sqrt{v}}.$$

Quarum aequationum illius, sumto quoque p variabili, differentialis iam inventa

$$pdx - xdp = \frac{k^m p^{m+1} dv - k^m p^m v dp}{gk^m p^m - v^m}$$

(§ 497). Ad alteram aequationem differentiandam pono

$$\frac{k^m}{(gk^m p^m - v^m)\sqrt{v}} = P$$

sitque

$$dt = Pdv + Qdp.$$

Quia autem P est functio ipsarum v et p dimensionum $-m-\frac{1}{2}$, erit

$$\left(\frac{1}{2} - m\right)t = Pv + Qp$$

atque hinc

$$Q = \frac{(1-2m)t}{2p} - \frac{Pv}{p}.$$

Quo valore loco Q substituto prodibit

$$pdt = \frac{k^m(pdv - vdp)}{(gk^m p^m - v^m)\sqrt{v}} + \frac{(1-2m)tdp}{2}.$$

Sit nunc $t = 2\sqrt{c}$ atque $dt = 0$; habebimus

$$(2m-1)dp\sqrt{c} = \frac{k^m(pdv - vdp)}{(gk^m p^m - v^m)\sqrt{v}}.$$

Eliminetur ex his duabus aequationibus dv et proveniet

$$pdx - xdp = (2m-1)p^m dp\sqrt{cv}$$

seu

$$\sqrt{v} = \frac{pdx - xdp}{(2m-1)p^m dp\sqrt{c}} = \frac{dr}{(2m-1)p^{m-2}dp\sqrt{c}}$$

$$(2m-1)dp\sqrt{c} = \frac{k^m(pdv - vd\ldots}{(gk^mp^m - v^m)\ldots}$$

vel in hac

$$\frac{dr}{p^{m-2}} = \frac{k^m(pdv - vdp)}{gk^mp^m - v^m}.$$

Casu quidem, quo $m = \frac{1}{2}$ seu resistentia celeritat
$pdv = vdp$ seu $v = ap$ et

$$p = \frac{x}{a} = \frac{1}{n^2} = \frac{xx}{zz},$$

unde sequitur fore $zz = ax$; quamobrem in hac resi
AMC est circulus omnino ut in vacuo. In aliis h
aequatio alterutra integretur, eliminata v habebit
differentialis inter z et x naturam curvae exprimens.

COROLLARIUM 1

499. Si ponatur $v = up$, erit

$$pdv - vdp = ppdu.$$

Atque hinc erit

$$\sqrt{u} = \frac{dr}{(2m-1)p^{m-\frac{3}{2}}dp\sqrt{c}},$$

qui valor substitutus in aequatione

$$dr = \frac{k^m du}{gk^m - u^m}$$

dabit aequationem inter p et r, ex qua aequatio inter

COROLLARIUM 2

500. In medio ergo, quod resistit in simplici celer
curvam AMC esse circulum. Atque ideo in hac resis
pora descensuum per singulas circuli chordas ex punct
se aequalia.

EXEMPLUM 1

501. Sit resistentia quadratis celeritatum proportionalis; erit $m =$
ne

$$x = \frac{k}{n} l \frac{gk}{gk - nv}$$

$$v = \frac{gk}{n}\left(1 - e^{\frac{-nx}{k}}\right).$$

ctorea vero erit

$$t = 2\sqrt{c} = \frac{\sqrt{nk}}{\sqrt{g}} l \frac{\sqrt{gk} + \sqrt{nv}}{\sqrt{gk} - \sqrt{nv}}$$

$$e^{\frac{2\sqrt{gc}}{\sqrt{nk}}} = \frac{\sqrt{gk} + \sqrt{nv}}{\sqrt{gk} - \sqrt{nv}},$$

e fit

$$v = \frac{gk\left(e^{\frac{2\sqrt{gc}}{\sqrt{nk}}} - 1\right)^2}{n\left(e^{\frac{2\sqrt{gc}}{\sqrt{nk}}} + 1\right)^2}.$$

minata ergo v et $\frac{z}{x}$ posito loco n habebitur

$$\frac{e^{\frac{z}{k}} - 1}{e^{\frac{z}{k}}} = \frac{\left(e^{\frac{2\sqrt{gcx}}{\sqrt{kz}}} - 1\right)^2}{\left(e^{\frac{2\sqrt{gcx}}{\sqrt{kz}}} + 1\right)^2}$$

$$\frac{2\sqrt{gcx}}{\sqrt{kz}} = l \frac{1 + \sqrt{\left(1 - e^{\frac{-z}{k}}\right)}}{1 - \sqrt{\left(1 - e^{\frac{-z}{k}}\right)}}.$$

hac curva est

$$AC = k l \frac{\left(e^{\frac{2\sqrt{gc}}{\sqrt{k}}} + 1\right)^2}{4e^{\frac{2\sqrt{gc}}{\sqrt{k}}}} = 2kl \frac{e^{\frac{\sqrt{gc}}{\sqrt{k}}} + e^{\frac{-\sqrt{gc}}{\sqrt{k}}}}{2};$$

gitur ponatur $AC = a$, erit

$$2e^{\frac{a}{2k}} = e^{\frac{\sqrt{gc}}{\sqrt{k}}} + e^{\frac{-\sqrt{gc}}{\sqrt{k}}},$$

unde erit

$$e^{\sqrt{\frac{gc}{k}}} = e^{\frac{a}{2k}} + \sqrt{\left(e^{\frac{a}{k}} - 1\right)}$$

seu

$$\sqrt{\frac{gc}{k}} = l\left(e^{\frac{a}{2k}} + \sqrt{\left(e^{\frac{a}{k}} - 1\right)}\right).$$

Erit igitur

$$\sqrt{x}\, l\left(e^{\frac{a}{2k}} + \sqrt{\left(e^{\frac{a}{k}} - 1\right)}\right) = \sqrt{z}\, l\left(e^{\frac{z}{2k}} + \sqrt{\left(e^{\frac{z}{k}} - 1\right)}\right)$$

aequatio pro curva AMC. Si resistentia fuerit valde parva, o vehementer magna atque ideo

$$e^{\frac{z}{2k}} + \sqrt{\left(e^{\frac{z}{k}} - 1\right)} = 1 + \frac{z}{2k} + \sqrt{\left(\frac{z}{k} + \frac{z^2}{2k^2}\right)} = 1 + \sqrt{\frac{z}{k}} + \frac{z}{2k}$$

huiusque logarithmus erit

$$= \frac{\sqrt{z}}{\sqrt{k}} + \frac{z\sqrt{z}}{12k\sqrt{k}}.$$

Simili modo erit

$$l\left(e^{\frac{a}{2k}} + \sqrt{\left(e^{\frac{a}{k}} - 1\right)}\right) = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{k}} + \frac{a\sqrt{a}}{12k\sqrt{k}}.$$

Atque hanc ob rem habebitur pro curva AMC haec aequatio

$$\sqrt{ax} + \frac{a\sqrt{ax}}{12k} = z + \frac{z^2}{12k}$$

seu

$$ax\left(1 + \frac{a}{6k} + \frac{a^2}{144k^2}\right) = z^2 + \frac{z^3}{6k} + \frac{z^4}{144k^2}.$$

Unde perspicitur, si resistentia prorsus evanescat seu k fiat in fore $ax = z^2$ atque ideo curvam AMC circulum. At si modi fuerit, erit

$$ax(a + 6k) = 6kz^2 + z^3$$

et differentiando

$$adx(a + 6k) = 12kzdz + 3z^2dz.$$

Si nunc fiat $zdz = xdx$, habebitur applicata PM maxima tangens curvae est verticalis, scilicet

$$a^2 + 6ak = 12kx + 3xz \quad \text{seu} \quad x = \frac{a^2 + 6ak}{12k + 3z},$$

t

$$\frac{(6ak+a^2)^2}{3} = 24k^2z^2 + 10kz^3 + z^4,$$

aequatione ipsius z valor quam proxime est

$$\frac{a}{\sqrt{2}} + \frac{(4\sqrt{2}-5)a^2}{48k}$$

$$x = \frac{a}{2} - \frac{(3\sqrt{2}-4)a^3}{48k} \quad \text{et} \quad PM = \frac{a}{2} + \frac{(2-\sqrt{2})a^2}{24k}.$$

ergo latissima est supra mediotatem ibique latior est quam altitudo AC.

COROLLARIUM 3

2. Si igitur linea recta vel curva hanc curvam AMC in M tangat, tota extra spatium AMC sit sita, corpus ex A ad eam lineam citius et descendendo super chorda AM quam super quavis alia recta ex A 1 lineam ducta.

EXEMPLUM 2

3. Sit m numerus affirmativus et resistentia valde parva; erit k as vehementer magna atque hinc

$$\frac{k^m}{gk^m - nv^m} = \frac{1}{g} + \frac{nv^m}{g^2k^m}.$$

a erit

$$x = \frac{v}{g} + \frac{nv^{m+1}}{(m+1)g^2k^m} \quad \text{atque} \quad t = 2\sqrt{c} = \frac{2n\sqrt{v}}{g} + \frac{2n^2v^{m+\frac{1}{2}}}{(2m+1)g^2k^m}$$

o prodit

$$v = gx - \frac{ng^mx^{m+1}}{(m+1)k^m} \quad \text{et} \quad \sqrt{v} = \sqrt{gx} - \frac{ng^{m-\frac{1}{2}}x^{m+\frac{1}{2}}}{2(m+1)k^m}$$

$$v^{m+\frac{1}{2}} = g^{m+\frac{1}{2}}x^{m+\frac{1}{2}} - \frac{n(2m+1)g^{2m-\frac{1}{2}}x^{2m+\frac{1}{2}}}{2(m+1)k^m}.$$

tem valoribus substitutis prodit ista aequatio

$$\frac{\sqrt{gc}}{\sqrt{x}} = n + \frac{n^2g^{m-1}x^m}{(2m+1)(2m+2)k^m} - \frac{n^3g^{2\cdot}}{(2m}$$

Quia vero est $n = \frac{z}{x}$, habebitur ista aequatio

$$\sqrt{gcx} = z + \frac{g^{m-1}x^{m-1}z^2}{(2m+1)(2m+2)k^m} - \frac{g^{2m-}}{(2m}$$

seu

$$gcx = z^2 + \frac{g^{m-1}x^{m-1}z^3}{(m+1)(2m+1)k^m},$$

si medium est rarissimum. Unde patet, si resistentia
$z^2 = gcx$ seu curvam AMC circulum diametri AC.

SCHOLION

504. Si igitur cognita fuerit curva AMC et
determinari poterit recta AM, super qua corpus ex
lineam pertingat. Scilicet construenda est curva AM
tangat v. g. in M; eritque recta AM ea recta, super
ex A citissime ad lineam datam perveniat. Atque
dente problemate, si recta vel curva tangat curvam C
corpus ex A descendendo per AM usque ad lineam
maiorem acquiret celeritatem quam descendendo su
A ad eam lineam ducta. Ex his igitur solvi possu
quiritur recta ex A ad datam lineam ducta, super
vel maximam acquirat celeritatem vel citissime a
Quamobrem hisce problematibus non diutius immora
super lineis rectis considerandum progrediemur.

PROPOSITIO 58

PROBLEMA

505. *In hypothesi gravitatis uniformis g et medi*
formi determinare motum corporis data cum celeritate in
ascendentis super linea recta AB utcunque inclinata ad

SOLUTIO

Ducta horizontali AC et ex M ad eam per
$PM = x$ sitque $AM = nx$. Sit altitudo debita cel

ndo debita celeritati in $M = v$; resistentia vero in M sit $= \frac{V}{K}$. His erit

$$dv = -g\,dx - \frac{nV\,dx}{K}$$

unde habetur

$$dx = \frac{-K\,dv}{gK + nV} \quad \text{atque} \quad x = \int \frac{-K\,dv}{gK + nV}$$

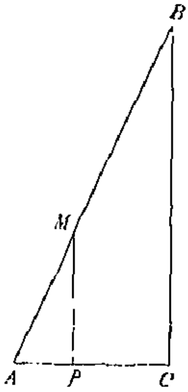


Fig. 62.

egrali ita accepto, ut evanescat posito $v = b$. Si ponatur $v = 0$, prodibit $x = BC$, ubi in puncto B mnem celeritatem amittit. Tempus vero, quo corpus ascendit, est

$$= \int \frac{-nK\,dv}{(gK + nV)\sqrt{v}}$$

grali quoque ita accepto, ut evanescat posito $v = b$; in quo si porro $v = 0$, prodibit tempus totius ascensus per AMB. Pressio autem, nea AMB sustinet, ubique est constans et aequalis vi normali

$$= \frac{g\sqrt{(n^2 - 1)}}{n}$$

COROLLARIUM 1

Si linea AMB fit horizontalis, evanescente angulo BAC fiet $n = \infty$. itur $AM = z = nx$ erit

$$z = \int \frac{-K\,dv}{V}$$

s, quo per AM progreditur, erit

$$= \int \frac{-K\,dv}{V\sqrt{v}}.$$

COROLLARIUM 2

Si resistentia fuerit ut potestas exponentis $2m$ celeritatum, erit t $K = k^m$. Hoc ergo casu erit

$$x = \int \frac{-k^m\,dv}{gk^m + nv^m}$$

atque tempus per AM

$$= \int \frac{-nk^m dv}{(gk^m + nv^m)\sqrt{v}}.$$

COROLLARIUM 3

508. Utraque haec expressio in seriem conver

$$x = \frac{b-v}{g} - \frac{n(b^{m+1} - v^{m+1})}{(m+1)g^2k^m} + \frac{n^2(b^{2m+1} -}{(2m+1)}$$

atque tempus per AM

$$= \frac{2n(\sqrt{b} - \sqrt{v})}{g} - \frac{2n^2(b^{m+\frac{1}{2}} - v^{m+\frac{1}{2}})}{(2m+1)g^2k^m} + \frac{2n^3(b^{2}}{(4m}$$

Quamobrem posito $v = 0$ erit

$$BC = \frac{b}{g} - \frac{nb^{m+1}}{(m+1)g^2k^m} + \frac{n^2b^{2m+}}{(2m+1)g}$$

atque tempus totius ascensus per AB

$$= \frac{2n\sqrt{b}}{g} - \frac{2n^2b^{m+\frac{1}{2}}}{(2m+1)g^2k^m} + \frac{2n^3b^{2m+}}{(4m+1)g^3}$$

EXEMPLUM 1

509. Sit resistentia celeritatibus proportionalis

$$x = \int \frac{-dv\sqrt{k}}{g\sqrt{k} + n\sqrt{v}} = \frac{2\sqrt{bk}}{n} - \frac{2\sqrt{kv}}{n} + \frac{2gk}{n^2}$$

Hinc erit tota altitudo BC, ad quam corpus pertin

$$= \frac{2\sqrt{bk}}{n} - \frac{2gk}{n^2} l \frac{g\sqrt{k} + n\sqrt{b}}{g\sqrt{k}}$$

Tempus vero, quo per AM ascendit, est

$$= \int \frac{-n\,dv\sqrt{k}}{(g\sqrt{k} + n\sqrt{v})\sqrt{v}} = 2\sqrt{k}\, l \frac{g\sqrt{k}}{g\sqrt{k}}$$

tempus totius ascensus per AMB erit

$$= 2\sqrt{k}\, l\, \frac{g\sqrt{k}+n\sqrt{b}}{g\sqrt{k}}.$$

r corpus super linea inclinata AC (Fig. 63) descenderit et celeritate in isita ascendat in CB usque ad B sitque $AC = N\cdot AD$ et $BC = n\cdot BE$ celeritas in C debita altitudini b, erit (§ 486)

$$AD = -\frac{2\sqrt{bk}}{N} + \frac{2gk}{N^2}\, l\, \frac{g\sqrt{k}}{g\sqrt{k}-N\sqrt{b}},$$

$$AC = -2\sqrt{bk} + \frac{2gk}{N}\, l\, \frac{g\sqrt{k}}{g\sqrt{k}-N\sqrt{b}},$$

$$BE = \frac{2\sqrt{bk}}{n} - \frac{2gk}{n^2}\, l\, \frac{g\sqrt{k}+n\sqrt{b}}{g\sqrt{k}},$$

$$CB = 2\sqrt{bk} - \frac{2gk}{n}\, l\, \frac{g\sqrt{k}+n\sqrt{b}}{g\sqrt{k}}.$$

tempus descensus per AC

$$= 2\sqrt{k}\, l\, \frac{g\sqrt{k}}{g\sqrt{k}-N\sqrt{b}}$$

t tempus ascensus per CB

$$= 2\sqrt{k}\, l\, \frac{g\sqrt{k}+n\sqrt{b}}{g\sqrt{k}}.$$

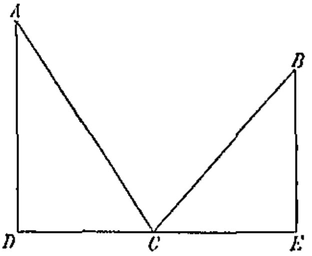


Fig. 63.

descensus et ascensus super lineis rectis inter se comparari possunt.

COROLLARIUM 4

0. Si hi logarithmi per series exprimantur, patet fieri non posse, ut $E = AD$; est enim in quacunque resistentiae hypothesi, ut ex seriebus et § 488) intelligitur, $BE < \frac{b}{g}$ et $AD > \frac{b}{g}$. Fieri autem potest, ut $C = BC$.

COROLLARIUM 5

1. Effici autem facile potest, ut tempus descensus per AC aequale mpori ascensus per CB. Fieri scilicet debet

$$ng\sqrt{k} = Ng\sqrt{k} + Nn\sqrt{b} \quad \text{seu} \quad n = \frac{\ldots}{g\sqrt{\ldots}}$$

Est igitur $n > N$ seu ang. $BCE <$ ang. ACD. Relati... pendet a celeritate in puncto C.

COROLLARIUM 6

512. Si autem angulus BCE aequalis fuerit an... tempus ascensus per BC minus erit tempore desc... hoc generaliter locum habet in quacunque resistenti... tempus descensus per $AC > \frac{2n\sqrt{b}}{g}$ et tempus ascensus... seriebus supra datis (§ 488 et § 508) apparet.

EXEMPLUM 2

513. Resistat medium in duplicata ratione ce... Quare habebitur

$$x = \int \frac{-k\,dv}{gk + nv} = \frac{k}{n}\, l\, \frac{gk + nb}{gk + nv}$$

atque (Fig. 62, p. 239)

$$BC = \frac{k}{n}\, l\, \frac{gk + nb}{gk} \quad \text{et} \quad AB = k\, l\, \frac{gk \ldots}{\ldots}$$

Tempus vero ascensus per AM erit

$$= \int \frac{-nk\,dv}{(gk + nv)\sqrt{v}} = \frac{2\sqrt{kn}}{\sqrt{g}} \left(A.\ \text{tang.} \sqrt{\frac{nb}{gk}} - A. \ldots \right.$$

existente radio $= 1$ et A denotante arcum circuli. E... sus per AB

$$= \frac{2\sqrt{kn}}{\sqrt{g}}\, A.\ \text{tang.} \sqrt{\frac{nb}{gk}}\,.$$

Si nunc corpus super linea inclinata AC (Fig. 63, p. 241... tate in C acquisita, quae debita sit altitudini b, ru... fueritque $AC = N \cdot AD$ et $BC = n \cdot BE$, erit

$$AD = \frac{k}{N}\, l\, \frac{gk}{gk - Nb} \quad \text{et} \quad AC = k\, l\, \frac{g\ldots}{gk \ldots}$$

empus descensus per AC

$$= \frac{\sqrt{Nk}}{\sqrt{g}}\, l\, \frac{\sqrt{gk}+\sqrt{Nb}}{\sqrt{gk}-\sqrt{Nb}}.$$

Porro vero erit

$$BE = \frac{k}{n}\, l\, \frac{gk+nb}{gk}, \quad BC = k\, l\, \frac{gk+nb}{gk}$$

pus ascensus per CB

$$= \frac{2\sqrt{nk}}{\sqrt{g}}\, A.\,\text{tang.} \sqrt{\frac{nb}{gk}}.$$

COROLLARIUM 7

4. In hac resistentiae hypothesi commode effici potest, ut sit BC; debebit enim esse

$$ngk = Ngk + Nnb \quad \text{seu} \quad n = \frac{Ngk}{gk - Nb}.$$

tur $n > N$ hincque ang. $BCE <$ ang. ACD.

EXEMPLUM 3

5. Sit resistentia quam minima et proportionalis potestati $2m$ celeri- erit k quantitas vehementer magna. Si ergo celeritas in C fuerit altitudini b et $AC = N \cdot AD$ atque $BC = n \cdot BE$ corpusque super AC dat et super CB ascendat, erit

$$AD = \frac{b}{g} + \frac{Nb^{m+1}}{(m+1)g^2k^m}$$

pus descensus per AC

$$= \frac{2N\sqrt{b}}{g} + \frac{2N^2b^m\sqrt{b}}{(2m+1)g^2k^m}.$$

. Pro ascensu vero erit

$$BE = \frac{b}{g} - \frac{nb^{m+1}}{(m+1)g^2k^m}$$

pus per CB

$$= \frac{2n\sqrt{b}}{g} - \frac{2n^2b^m\sqrt{b}}{(2m+1)g^2k^m}.$$

(§ 508). Si igitur effici debeat, ut sit $AC = BC$, op

$$N + \frac{N^2 b^m}{(m+1)gk^m} = n - \frac{n^2 b^m}{(m+1)g}$$

unde fit

$$n = N + \frac{2N^2 b^m}{(m+1)gk^m}$$

propter quantitatem k valde magnam. At quo tem
aequale sit tempori ascensus per CB, debet esse

$$N + \frac{N^2 b^m}{(2m+1)gk^m} = n - \frac{n^2 b^m}{(2m+1)}$$

seu

$$n = N + \frac{2N^2 b^m}{(2m+1)gk^m}.$$

SCHOLION 1

516. In casu huius exempli, quo resistentia est v
(Fig. 64) potest determinari huius proprietatis, ut corp

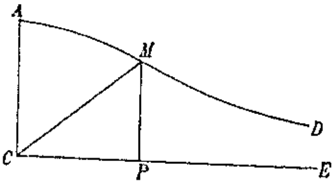


Fig. 64.

tudini b debita ascend
CM ad curvam AMD
$CM = z$ et $MP = x$

$$x = \frac{b}{g} - ($$

Quare habebitur ista aequatio

$$b^{m+1}z = (m+1)gbk^m x - (m+1)g^2 k$$

Sit $CP = y$ et loco

$$\frac{b^{m+1}}{(m+1)gk^m}$$

scribatur f; orietur

$$f\sqrt{(x^2+y^2)} = bx - gx^2$$

seu

$$ffyy = (bb-ff)xx - 2gbx^3 + g^2 x$$

Si ponatur $y = 0$, erit et $x = 0$ et $x = \frac{b-f}{g} = CA$.
punctum C transit, quae autem eius pars quaesti

sequentes terminos neglectos, qui perperam negliguntur, si n seu $\frac{z}{x}$ ne valde magnum. Aequatio vero dat curvam ellipsiformem maxime n circa axem minorem AC descriptam. Vera autem curva habet AMD, cuius asymtotos est horizontalis CE, si quidem est $m > 1$, aequatio habetur omnibus sumendis terminis, quae erit

$$xdz + (m-1)zdx = \frac{bk^m(zdx - xdz)}{gk^m x + b^m z}.$$

1, curva non in infinitum progredietur, sed incidet in CE sumendo

$$CE = \frac{bk^m}{(1-m)b^m}.$$

$m < 1$, corpus horizontaliter non in infinitum progredi potest, sed in a finita omnem amittit celeritatem.

SCHOLION 2

. Si medium resistens non sit uniforme, tum linea non esset recta, ua motus facillime determinari posset; idem quoque est notandum, si sollicitans non fuerit uniformis. Ut sit potentia sollicitans $= P$ et ia $= \frac{V}{Q}$, ubi Q talis est functio exponentis resistentiae variabilis q, V est ipsius v; his positis motus corporis super quacunque curva ex- hac aequatione

$$dv = \pm Pdx \pm \frac{Vds}{Q}.$$

go curvae, super qua motus facillime definitur, haec erit aequatio

$$PQdx = Ads,$$

oritur sequens

$$\frac{Adv}{\pm A \pm V} = Pdx$$

super hac curva determinans, in qua indeterminatae sunt a se in- eparatae. Quare si etiam huiusmodi hypotheses persequi vellemus, loco n rectarum huiusmodi curvas hac aequatione expressas $PQdx = Ads$ e deberemus. Sed quia statuimus hypothesin potentiae sollicitantis tentiae uniformis tantum fusius pertractare, missis his ad eos casus imur, in quibus v unicam tantum habet dimensionem, id quod evenit, tentia proportionalis fuerit quadratis celeritatum.

PROPOSITIO 59

PROBLEMA

518. *In hypothesi gravitatis uniformis g et resist*
proportionalis descendat corpus super curva quacunqu
determinare eius motum et pressionem, quam curva in

SOLUTIO

In axe verticali sumatur abscissa $AP = x$ et
celeritas in M debita altitudini v et exponens resis
$= \frac{v}{k}$. Quamobrem ista habebitur aequatio motum

$$dv = g\,dx - \frac{v\,ds}{k}$$

(§ 465). Ad hanc integrandam multiplico per $e^{\frac{s}{k}}$ er

$$e^{\frac{s}{k}} v = \int e^{\frac{s}{k}} g\,dx.$$

Ita autem sumi debet hoc integrale, ut posito $s =$
celeritati initiali in A debitam. Si igitur descensu
$e^{\frac{s}{k}} g\,dx$ ita debet integrari, ut evanescat posito $s =$

$$v = g e^{\frac{-s}{k}} \int e^{\frac{s}{k}} dx.$$

Unde tempus per AM erit

$$= \int \frac{e^{\frac{s}{2k}} ds}{\sqrt{g \int e^{\frac{s}{k}} dx}}.$$

Posito nunc $PM = y$ sumtoque dx constante erit
secundum normalem MN sustinet,

$$= \frac{g\,dy}{ds} + \frac{2g e^{\frac{-s}{k}} dx\,ddy \int e^{\frac{s}{k}} dx}{ds^3}$$

Q. E. I.

COROLLARIUM 1

519. Pressio, quam curva sustinet, in hanc formam potest transmuta

$$\frac{g\,ds}{e^{\frac{s}{k}}\,dy\,dx}\,d.\frac{dy^2}{ds^2}\int e^{\frac{s}{k}}\,dx,$$

, postquam pro data curva integratum est $e^{\frac{s}{k}}dx$, commodius ad quos s accommodatur.

COROLLARIUM 2

520. Corpus in descensu maximam habet celeritatem, ubi est $v = \frac{gk\,d}{ds}$ vero evenit, ubi est

$$e^{\frac{s}{k}}k\,dx = ds\int e^{\frac{s}{k}}dx$$

ubi

$$d.\,l\int e^{\frac{s}{k}}dx = \frac{ds}{k};$$

uo puncto patet tangentem non esse horizontalem.

COROLLARIUM 3

521. Si fuerit

$$\int e^{\frac{s}{k}}dx = \frac{e^{\frac{s}{k}}s^n}{a^{n-1}},$$

$$dx = \frac{ns^{n-1}ds}{a^{n-1}} + \frac{s^n ds}{a^{n-1}k}$$

o

$$x = \frac{s^n}{a^{n-1}} + \frac{s^{n+1}}{(n+1)a^{n-1}k}.$$

e si haec aequatio exprimat curvae quaesitae naturam, erit

$$v = \frac{gs^n}{a^{n-1}}$$

empus per AM

$$= \frac{2a^{\frac{n-1}{2}}s^{\frac{2-n}{2}}}{(2-n)\sqrt{g}},$$

uidem n fuerit minor binario; nam si $n = 2$ vel $n > 2$ curva in A t em horizontalem habebit atque corpus ibi perpetuo

COROLLARIUM 4

522. Simili modo etiam perspicitur, si x fu
ipsius s vel huiusmodi potestatum aggregatum, seu
atque ideo celeritatem terminis finitis exhiberi.

COROLLARIUM 5

523. Si autem abscissae in axe verticali BQ su
corpus in B habebit, debita sit altitudini b praeter
$BM = s$, erit

$$dv = -g\,dx + \frac{v\,ds}{k},$$

cuius integralis est

$$e^{\frac{-s}{k}} v = b - g\int e^{\frac{-s}{k}} dx$$

integrali scilicet $\int e^{\frac{-s}{k}} dx$ ita accepto, ut evanescat
rem erit

$$v = be^{\frac{s}{k}} - ge^{\frac{s}{k}} \int e^{\frac{-s}{k}} dx$$

et tempus, quo in descensu arcus MB absolvitur,

$$= \int \frac{ds}{e^{\frac{s}{2k}} \sqrt{\left(b - g\int e^{\frac{-s}{k}} dx\right)}}.$$

COROLLARIUM 6

524. Si igitur detur celeritas in puncto B, n
in curva BMA punctum A, ex quo corpus descend
tatem habuit $= 0$. Quaeri debet scilicet locus, ubi

$$\int e^{\frac{-s}{k}} dx = \frac{b}{g}.$$

Atque etiam expressio temporis

$$\int \frac{ds}{e^{\frac{s}{2k}} \sqrt{\left(b - g\int e^{\frac{-s}{k}} dx\right)}}$$

mpus totius descensus per AMB, si post integrationem ponatur

$$\int e^{-\frac{s}{k}} dx = \frac{b}{g}.$$

SCHOLION

Duplicem hic motum investigandi modum ideo attulimus, ut tam ensus ex dato puncto factos quam ad descensus usque ad datum , ut in motu oscillatorio fieri solet, accommodari possit.

PROPOSITIO 60

PROBLEMA

Existente potentia sollicitante uniformi et medio uniformi resistente in ratione celeritatum determinare motum corporis ascendentis super data MD (Fig. 58, p. 220) *et pressionem, quam curva sustinet in singulis I.*

SOLUTIO

inea verticali AP ponatur abscissa $AP = x$, arcus $AM = s$, celeritas bita altitudini b et celeritas in M altitudini v. Sit potentia solliorsum $= g$ et resistentia $= \frac{v}{k}$. His positis erit

$$dv = -g dx - \frac{v ds}{k}$$

uae multiplicata per $e^{\frac{s}{k}}$ dat integrale

$$e^{\frac{s}{k}} v = b - g \int e^{\frac{s}{k}} dx$$

o $\int e^{\frac{s}{k}} dx$, ut evanescat posito $x = 0$. Hanc ob rem erit

$$v = e^{\frac{-s}{k}} b - g e^{\frac{-s}{k}} \int e^{\frac{s}{k}} dx$$

mpus ascensus per arcum AM

$$= \int \frac{e^{\frac{s}{2k}} ds}{\sqrt{\left(b - g \int e^{\frac{s}{k}} dx\right)}}.$$

Ex inventa celeritate habebitur pressio, quam cu
MN patitur,

$$= \frac{gdy}{ds} - \frac{2vdxddy}{ds^3}$$

§ 475, posito $PM = y$ et sumto dx pro constan

COROLLARIUM 1

527. Posito ergo $v = 0$ erit

$$g\int e^{\frac{s}{k}} dx = b,$$

ex qua aequatione obtinebitur punctum D, quou
poterit. Atque tempus totius ascensus por AMI
temporis ponatur

$$g\int e^{\frac{s}{k}} dx = b.$$

COROLLARIUM 2

528. Si in formula pressionem exhibente lo
stituatur, habebitur

$$-\frac{2e^{\frac{-s}{k}} bdxddy}{ds^3} + \frac{gdy}{ds} + \frac{2ge^{\frac{-s}{k}} dx$$

Quae transmutari potest in hanc formam

$$-\frac{2e^{\frac{-s}{k}} bdxddy}{ds^3} + \frac{gds}{e^{\frac{s}{k}} dydx} d. \frac{dy}{ds}$$

COROLLARIUM 3

529. Pro descensu vero, si celeritas in A d
pressio, quam curva in M secundum normalem

$$= -\frac{2e^{\frac{s}{k}} bdxddy}{ds^3} + \frac{ge^{\frac{s}{k}} ds}{dydx} d. \frac{d}{d}$$

COROLLARIUM 4

. Si igitur tam ascensus quam descensus respectu axis AP definiatur, ascensum determinans transmutari potest in aequationem descensus $-k$ loco k atque vicissim. Quare si super curva AM descensus eterminatus, habebitur quoque ascensus et vicissim.

SCHOLION

. Quia formulae ascensum et descensum determinantes tantam inter nt affinitatem, ascensus et descensus facile poterunt inter se comparari deo oscillationes super data curva determinari. Id quod in sequente ione, quantum generaliter fieri potest, praestabimus.

PROPOSITIO 61

PROBLEMA

. *Sint curvae quaecunque MA et NA* (Fig. 65) *in infimo puncto A con- atque corpus descendat super curva [MA et ascendat super curva] AN resistente uniformi secundum quadrata celeritatum; inter se comparare n super curva MA et ascensum super curva AN.*

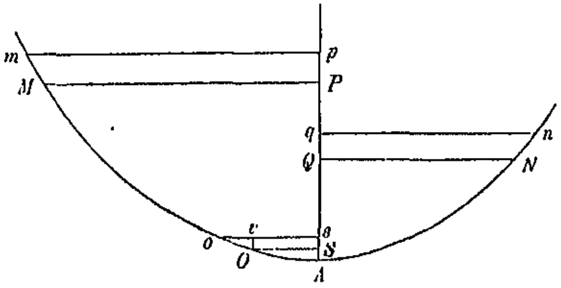


Fig. 65.

SOLUTIO

coleritas in puncto A debita altitudini b atque in axe verticali AP $AP = x$, arcus $AM = s$. Pro curva ascensus AN vero sit $AQ = t$ $= r$. His positis erit corporis descendentis celeritas in M debita

$$e^{\frac{s}{k}} b - g e^{\frac{s}{k}} \int e^{\frac{-s}{k}} dx$$

§ 523. Corporis vero ascendentis super curva A
altitudini

$$e^{\frac{-r}{k}} b - g e^{\frac{-r}{k}} \int e^{\frac{r}{k}} dt$$

§ 526. Quare si celeritates in M et N evanosc
una semioscillatione descriptus, erit

$$\frac{b}{g} = \int e^{\frac{-s}{k}} dx \quad \text{et} \quad \frac{b}{g} = \int e$$

Si nunc concipiatur alia semioscillatio arcum mA
in puncto A debita sit altitudini $b + db$, erit

$$\frac{b + db}{g} = \int e^{\frac{-s}{k}} dx + e^{\frac{-s}{k}} d$$

hincque

$$e^{\frac{-s}{k}} dx = \frac{db}{g} \quad \text{seu} \quad e^{\frac{-AM}{k}} \cdot Pp$$

Similiter pro ascensu erit

$$e^{\frac{AN}{k}} \cdot Qq = \frac{db}{g}.$$

Ex quibus fiet

$$\frac{Pp}{Qq} = e^{\frac{AM + AN}{k}} \quad \text{seu} \quad l Pp - l Qq =$$

Dato ergo arcu MAN una semioscillatione des
proximo superiore m descendere incipiat, inven
supra N pertinget; erit nempe

$$Qq = \frac{Pp}{e^{\frac{AM + AN}{k}}}.$$

Q. E. I.

COROLLARIUM 1

533. Si igitur MAN et mAn fuerint duo a
descripti, erit semper $Qq < Pp$ eoque minus eri
fuerit summa arcuum $AM + AN$. Semper igi
quam AP.

COROLLARIUM 2

In vacuo, quia est $k = \infty$, erit $e^{\frac{AM+AN}{k}} = 1$; fietque $Qq = Pp$ atque
$= AP$. Quare corpus oscillans in vacuo ad tantam ascendit altitu-
uanta erat illa, ex qua descendit.

COROLLARIUM 3

Si resistentia fuerit valde parva ideoque k vehementer magnum, erit

$$e^{\frac{AM+AN}{k}} = 1 + \frac{MAN}{k}.$$

c casu erit

$$Qq + \frac{MAN \cdot Qq}{k} = Pp \quad \text{atque} \quad Qq = \frac{Pp(k - MAN)}{k}.$$

COROLLARIUM 4

Si punctum O fuerit locus, in quo corpus descendens maximam
ioritatem, ibique ponatur $AO = s$, $AS = x$, erit

$$\frac{gkdx}{ds} = e^{\frac{s}{k}} b - g e^{\frac{s}{k}} \int e^{\frac{-s}{k}} dx$$

$$b = g \int e^{\frac{-s}{k}} dx + \frac{gkdx}{ds} \text{ 1)}.$$

corpus ex m descendat, erit punctum maximae celeritatis in o

$$db = g e^{\frac{-s}{k}} dx + \frac{gkdy}{p},$$

$dy = ov$ et p radio osculi in puncto O, seu

$$\frac{db}{g} = e^{\frac{-AO}{k}} Ss + \frac{k \cdot ov}{p}.$$

uius aequationis loco ponenda est aequatio

$$b = g \int e^{\frac{-s}{k}} dx + \frac{gkdx}{ds} e^{\frac{-s}{k}}.$$

m formulae sequentes corrigendae sunt. P. St.

COROLLARIUM 5

537. Tempus unius itus per MAN habetur,

$$\int \frac{e^{\frac{-s}{2k}} ds}{\sqrt{\left(b - g\int e^{\frac{-s}{k}} dx\right)}} + \int \frac{e^{\frac{s}{2}}}{\sqrt{\left(b - \right.}}$$

ponatur

$$\int e^{\frac{-s}{k}} dx = \frac{b}{g} \quad \text{atque} \quad \int e^{\frac{r}{k}} dt$$

Sicque prodibit tempus unius semioscillationis.

COROLLARIUM 6

538. Ex dictis alia elegans sequitur propriet
ritate $\sqrt{b}$ ascendat ad N atque ex N iterum d
ritas, quam tum in A habebit, debita altitudini
altitudini $b + db$ debita ascendat pertingatque ad
in A acquirat celeritatem altitudini $c + dc$ debita

$$\frac{db}{g} = e^{\frac{AN}{k}} \cdot Qq \quad \text{et} \quad \frac{dc}{g} = e^{\frac{-A}{k}}$$

atque

$$Qq^2 = \frac{db \cdot dc}{g^2}$$

vel etiam

$$\frac{db}{dc} = e^{\frac{2AN}{k}}.$$

SCHOLION

539. Restat, ut haec generalia ad exempla
demus, quo usus eorum eo magis pateat. Accipie
cycloidem tantum, eo quod $\int e^{\frac{s}{k}} dx$ in ea facile
quoque inter s et x sit algebraica. Investigabimu
cycloide factos quam oscillationes, quo appareat,
in cycloide fiunt, ab isochronismo discrepent, qu
eodem tempore absolvi sunt demonstratae [§ 191].

PROPOSITIO 62

PROBLEMA

Sit curva data cyclois ACB (Fig. 66) *super basi horizontali AB pro- circuli diametri CD descripta corpusque super ea ex A descendat in sistente in duplicata ratione celeritatum; determinare motum corporis tis.*

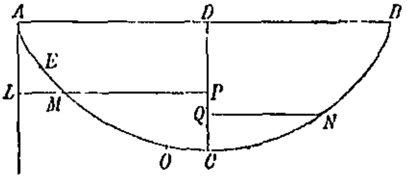


Fig. 66.

SOLUTIO

ita $2CD = a$, $AL = x$ et $AM = s$ erit ex natura cycloidis

$$s = a - \sqrt{(a^2 - 2ax)} \quad \text{seu} \quad 2ax = 2as - ss.$$

voro in M debita sit altitudini v; erit

$$v = g e^{-\frac{s}{k}} \int e^{\frac{s}{k}} dx.$$

tem est

$$dx = ds - \frac{sds}{a},$$

$$e^{\frac{s}{k}} dx = k e^{\frac{s}{k}} + \frac{k^2 e^{\frac{s}{k}}}{a} - \frac{k e^{\frac{s}{k}} s}{a} - k - \frac{k^2}{a} = e^{\frac{s}{k}} \frac{ak + k^2 - ks}{a} - \frac{ak + k^2}{a}.$$

ore substituto erit

$$v = \frac{gak + gk^2 - gks}{a} - \frac{g e^{-\frac{s}{k}} (ak + k^2)}{a}.$$

corporis erit celeritas, ubi est

$$v = \frac{gkdx}{ds} = \frac{gak - gks}{a};$$

hoc igitur accidit, ubi est

$$e^{\frac{s}{k}} k = a + k \quad \text{seu} \quad s = kl\frac{a+}{k}$$

Inveniri etiam potest punctum N, in quo corpus
faciendo $v = 0$ seu

$$e^{\frac{s}{k}} = \frac{a+k}{a+k-s} \quad \text{seu} \quad s = kl\frac{a}{a+}$$

ex qua aequatione valor ipsius s dat arcum ACN.
descensu absolvitur, est

$$= \int \frac{ds\sqrt{a}}{\sqrt{gk\left(a+k-s-e^{\frac{-s}{k}}(a+k\right.}}$$

Deinde ad pressionem inveniendam est

$$\frac{dy}{ds} = \frac{\sqrt{(2as-ss)}}{a} = \frac{\sqrt{2ax}}{a},$$

unde pressio ipsa in puncto M prodit

$$= \frac{g\sqrt{2ax}}{a} + \frac{2gak + 2gkk - 2gks}{a\sqrt{2ax}} - \frac{2ga}{e^{\frac{s}{k}}}$$

Determinavimus ergo celeritatem et tempus et press
poris innotescit. Q. E. I.

COROLLARIUM 1

541. Quia est

$$e^{\frac{-s}{k}} = 1 - \frac{s}{1\cdot k} + \frac{s^2}{1\cdot 2k^2} - \frac{s^3}{1\cdot 2\cdot 3k^3} +$$

si ponatur $a + k = c$ seu $a = c - k$, erit

$$\frac{(c-k)v}{gk} = -s + \frac{cs}{1\cdot k} - \frac{cs^2}{1\cdot 2k^2} + \frac{cs^3}{1\cdot 2\cdot 3k^3} - \text{etc.} = \frac{as}{1\cdot k}$$

Quare erit

$$v = \frac{gs}{a}\left(\frac{a}{1} - \frac{s}{1\cdot 2} - \frac{as}{1\cdot 2k} + \frac{(a+k)s^2}{1\cdot 2\cdot 3k^2} - \frac{(a-}{1\cdot 2\cdot}\right.$$

COROLLARIUM 2

In vacuo igitur, ubi k est infinitum, erit

$$v = gs - \frac{gs^2}{2a} = gx,$$

at. At si resistentia tantum sit valde parva et propterea k valde , erit

$$v = gs - \frac{gs^2}{2a} - \frac{gs^2}{2k} + \frac{gs^3}{6ak}.$$

COROLLARIUM 3

In vacuo apparet celeritatem corporis esse nullam in duobus punctis, $s = 0$ et $s = 2a$, i. e. in duobus cuspidibus A et B. In medio vero o alter locus est $s = 0$; alter vero ex hac aequatione erui debet

$$a = \frac{cs}{1 \cdot 2k} - \frac{cs^2}{1 \cdot 2 \cdot 3k^2} + \frac{cs^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4k^3} - \text{etc.},$$

venitur

$$s = \frac{2ak}{c} + \frac{4a^2k}{3c^2} + \frac{10a^3k}{9c^3} + \frac{136a^4k}{135c^4} + \text{etc.}[1])$$

k fuerit valde magnum, erit

$$s = \frac{2ak}{a+k} + \frac{4a^2k}{3(a+k)^2} = 2a - \frac{2a^2}{3k} \text{ quam proxime.}$$

COROLLARIUM 4

. Eadem haec series inventa substituto $a + k$ loco c transformatur

$$s = 2a - \frac{2a^2}{3k} + \frac{4a^3}{9k^2} - \frac{44a^4}{135k^3} + \text{etc.}[2]),$$

valor ipsius s dat arcum ACN, quo usque corpus motu suo perve-est.

Editio princeps:

$$s = \frac{2ak}{c} + \frac{4a^2k}{3c^2} + \frac{18a^3k}{9c^3} + \frac{196a^4k}{135c^4} + \text{etc.}$$ Correxit P. St.

Editio princeps:

$$s = 2a - \frac{2a^2}{3k} + \frac{7a^3}{9k^2} + \frac{119a^4}{135k^3} + \text{etc.}$$ Correxit P. St.

COROLLARIUM

545. Arcus AO ab A usque ad O, ubi

tatem, est

$$kl\frac{a+k}{k} = a - \frac{a^2}{2k} + \frac{a^3}{3k^2} -$$

Quare erit arcus

$$ON = a - \frac{a^2}{6k} + \frac{a^3}{9k^2}$$

$$OC = \frac{a^2}{2k} - \frac{a^3}{3k^2} + \frac{a^4}{4k}$$

et

$$AO + ON = \frac{a^2}{3k} - \frac{2}{9}$$

COROLLARIUM

546. Celeritas vero in puncto C reperita

$$\frac{gk^2 - ge^{-\frac{a}{k}}(ak+kk)}{a} = g\left(\frac{a}{2} - \frac{a^2}{1\cdot 3k} + \frac{a^3}{1\cdot 2\cdot 4k^2}\right.$$

Unde perspicitur celeritatem in C nunquam altitudo huic celeritati debita est

$$\frac{gk^2}{e^{\frac{a}{k}}a}\left(e^{\frac{a}{k}} - 1 -\right.$$

atque $e^{\frac{a}{k}}$ semper maius est quam $1 + \frac{a}{k}$; ex
Quare altitudo debita celeritati in C mai
maior est quam AC.

1) Editio princeps:

$$ON = a - \frac{a^2}{6k} + \frac{4a^3}{9k^2}$$

2) Editio princeps:

$$AO + ON = \frac{a^2}{8k}$$

COROLLARIUM 7

547. Altitudo debita celeritati maximae in O est

$$= gk - \frac{gk^2}{a} l \frac{a+k}{k} = g\left(\frac{a}{2} - \frac{a^2}{3k} + \frac{a^3}{4k^2} - \frac{a^4}{5k^3} + \text{etc.}\right).$$

uare excessus huius altitudinis supra altitudinem celeritati in C debitam

$$= g\left(\frac{a^3}{1\cdot 2\cdot 4k^2} - \frac{5a^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 5k^3} + \frac{23a^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 6k^4} - \text{etc.}\right) = ge^{\frac{-a}{k}}\left(\frac{a^3}{8k^2} - \frac{a^4}{24k^3} + \text{etc.}\right)$$

aec nempe expressio obtinetur, si in generali valore ipsius v substitua $l\frac{a+k}{k}$ loco s, quippe cui quantitati arcus AO est aequalis.

SCHOLION

548. In solutione huius propositionis considerandum venit, quod ex f mula descensum tantum determinante etiam ascensum corporis super a CN derivavimus; ex quo dubium oriri potest, an iste ascensus legitime etinitus. Hoc autem ex ipsa formula ascensum determinante facile pers tur. Usi enim fuimus formula hac

$$dv = gdx - Rds,$$

uae puncto M ultra punctum C cadente propter dx factum negativum a hanc

$$dv = -gdx - Rds,$$

uae revera naturam ascensus continet. Ex his intelligitur continuitas i scensum et descensum, qua nullo interiecto saltu inter se cohaerent. nim curva se sursum flectere incipit, ibi simul formula descensui inservi ransmutatur sponte in formulam ascensus. Atque haec connexio locum ha medio quocunque resistente, uti ex generalibus formulis apparet, q ntum signo ipsius dx discrepant. Quamobrem data aequatione pro cu uacunque non est necesse, ut inquiratur, super quanam parte corpus as at descendatve, sed alterutra formula ad aequationem accommodata ve abit motum super curva proposita. Hoc tantum est tenendum, ut absci axe verticali capiantur atque ea formula sive ascensus sive descensus ibeatur, quae cum motus initio congruat.

PROBLEMA

549. *Sit curva data ACB* (Fig. 66, p. 255) *cyclois super*
descripta et deorsum spectans corpusque super ea oscillation
resistente in duplicata ratione celeritatum; determinare motum

SOLUTIO

Ponatur diameter circuli $CD = \frac{1}{2}a$ in eaque sumatu
et arcus CM vocetur s; erit ex natura cycloidis

$$s = \sqrt{2ax} \quad \text{et} \quad x = \frac{ss}{2a} \quad \text{atque} \quad dx = \frac{sd}{a}$$

Descendat nunc corpus super arcu MC sitque eius celerita
tudini b; erit altitudo debita celeritati in M

$$= e^{\frac{s}{k}} b - g e^{\frac{s}{k}} \int e^{\frac{-s}{k}} dx$$

(§ 523). Est vero

$$\int e^{\frac{-s}{k}} dx = \int \frac{e^{\frac{-s}{k}} s ds}{a} = \frac{k^2 - k^2 e^{\frac{-s}{k}} - k e^{\frac{-s}{k}} s}{a};$$

quare altitudo debita celeritati in M est

$$= \frac{e^{\frac{s}{k}}(ab - gk^2) + gk^2 + gks}{a} = e^{\frac{s}{k}} b - \frac{g}{a}\left(\frac{s^2}{2} + \frac{s^3}{2\cdot 3k} + \frac{s^4}{2\cdot 3\cdot 4k^2} + \right.$$

Arcus ergo, in quo integer fit descensus, habebitur, si ips
aequatione quaeratur

$$e^{\frac{s}{k}} = \frac{gk^2 + gks}{gk^2 - ab}.$$

Fiet autem hinc in serie

$$s = A + \frac{A^2}{3k} + \frac{11A^3}{72k^2} + \frac{43A^4}{540k^3} + \text{etc.}^{1)}$$

1) Editio princeps:

$$s = A + \frac{A^2}{3k} + \frac{5A^3}{24k^2} + \frac{11A^4}{180k^3} + \text{etc.}$$

brevitatis ergo A loco $\frac{\sqrt{2ab}}{\sqrt{g}}$. Huic ergo seriei aequatur arcus CM,
dem corpus ex puncto M descendere inceperit. Celeritatem maximam
s habebit in O sumto $CO = s$ ex hac aequatione

$$e^{\frac{s}{k}} = \frac{gk^2}{gk^2 - ab} \quad \text{seu} \quad CO = k\,l\frac{gk^2}{gk^2 - ab}$$

altitudo huic maximae celeritati debita est

$$= \frac{gk \cdot CO}{a} = \frac{gk^2}{a}\,l\frac{gk^2}{gk^2 - ab} = b + \frac{ab^2}{2gk^2} + \frac{a^2b^3}{3g^2k^4} + \text{etc.}$$

mpus determinandum convenit ad punctum O celeritatemque maximam
ere et tempus per MO definire. Hanc ob rem pono altitudinem cele-
in O debitam $= c$ et arcum $MO = q$; erit

$$CO = \frac{ac}{gk} \quad \text{et} \quad ab = gk^2\left(1 - e^{\frac{-ac}{gk^2}}\right), \quad s = \frac{ac}{gk} + q.$$

ubstitutis erit altitudo debita celeritati in M, seu v,

$$= \frac{gk^2 + ac + gkq - e^{\frac{q}{k}}gk^2}{a}.$$

nunc v minor est quam c, pono $c - v = z$ eritque

$$az + gk^2 + gkq = e^{\frac{q}{k}}gk^2$$

in serie

$$\frac{az}{g} = \frac{q^2}{2} + \frac{q^3}{6k} + \frac{q^4}{24k^2} + \frac{q^5}{120k^3} + \text{etc.}$$

a convertendo fit

$$q = \frac{\sqrt{2az}}{\sqrt{g}} - \frac{az}{3gk} + \frac{az\sqrt{2az}}{18gk^2\sqrt{g}} - \frac{2a^2z^2}{135g^2k^3} + \frac{a^2z^2\sqrt{2az}}{1080g^2k^4\sqrt{g}} - \text{etc.}$$

at descensus in puncto M; erit ibi $v = 0$ et $z = c$ ideoque

$$OM = \frac{\sqrt{2ac}}{\sqrt{g}} - \frac{ac}{3gk} + \frac{ac\sqrt{2ac}}{18gk^2\sqrt{g}} - \frac{2a^2c^2}{135g^2k^3} + \frac{a^2c^2\sqrt{2ac}}{1080g^2k^4\sqrt{g}} - \text{etc.}$$

quia perinde est, sive g ponatur negativum sive
fuerit punctum, quousque corpus ascendit,

$$=\frac{\sqrt{2ac}}{\sqrt{g}}+\frac{ac}{3gk}+\frac{ac\sqrt{2ac}}{18gk^2\sqrt{g}}+\frac{2a^2c^2}{135g^2k^3}+\frac{a^2}{108\ldots}$$

Tempus vero per MO hoc modo invenitur: quia est

$$ds=dq=\frac{adz}{\sqrt{2gaz}}-\frac{adz}{3gk}+\frac{adz\sqrt{2az}}{12gk^2\sqrt{g}}-\frac{4a^3zdz}{135g^2k^3}-\ldots$$

hoc divisum per $\sqrt{v}=\sqrt{(c-z)}$ dat elementum temp

$$=\frac{dz\sqrt{a}}{\sqrt{2g(cz-z^2)}}-\frac{adz}{3gk\sqrt{(c-z)}}+\frac{azdz\sqrt{2a}}{12gk^2\sqrt{g(cz-z\ldots}}$$

$$+\frac{a^3z^2dz\sqrt{2a}}{432g^3k^4\sqrt{g(cz-z^2)}}-\text{etc.}$$

Quod ita integrari debet, ut posito $v=c$ vel $z=0$
natur $z=c$, habebitur tempus, quo corpus per arc
igitur tempus, posita peripheriae ad diametrum rati

$$=\frac{\pi\sqrt{a}}{\sqrt{2g}}-\frac{2a\sqrt{c}}{3gk}+\frac{\pi ac\sqrt{a}}{12gk^2\sqrt{2g}}-\frac{16a^2c\ldots}{405g^3\ldots}$$

Posito igitur k negativo erit tempus, quo corpus ex

$$=\frac{\pi\sqrt{a}}{\sqrt{2g}}+\frac{2a\sqrt{c}}{3gk}+\frac{\pi ac\sqrt{a}}{12gk^2\sqrt{2g}}+\frac{16a^2c\ldots}{405g^3\ldots}$$

Tempus ergo per MCN seu tempus unius dimidiae

$$=\frac{\pi\sqrt{2a}}{\sqrt{g}}+\frac{\pi ac\sqrt{2a}}{12gk^2\sqrt{g}}+\text{etc.}$$

Q. E. I.

---

1) Editio princeps: $\frac{4a^2c\sqrt{c}}{135g^2k^3}$ $\left(\text{loco } \frac{16a^2c\sqrt{c}}{405g^2k^3}\right)$. Correxi

COROLLARIUM 1

Si ergo celeritas maxima corporis descendentis fuerit debita altitu-
ropter

$$CO = \frac{ac}{gk}$$

$$MC = \frac{\sqrt{2ac}}{\sqrt{g}} + \frac{2ac}{3gk} + \frac{ac\sqrt{2ac}}{18gk^2\sqrt{g}} - \frac{2a^2c^2}{135g^2k^3} + \frac{a^2c^2\sqrt{2ac}}{1080g^2k^4\sqrt{g}} - \text{etc.}$$

ro ascensus CN erit

$$N - CO = \frac{\sqrt{2ac}}{\sqrt{g}} - \frac{2ac}{3gk} + \frac{ac\sqrt{2ac}}{18gk^2\sqrt{g}} + \frac{2a^2c^2}{135g^2k^3} + \frac{a^2c^2\sqrt{2ac}}{1080g^2k^4\sqrt{g}} + \text{etc.}$$

,

$$CM - CN = \frac{4ac}{3gk} - \frac{4a^2c^2}{135g^2k^3} - \text{etc.}$$

$$MCN = \frac{2\sqrt{2ac}}{\sqrt{g}} + \frac{ac\sqrt{2ac}}{9gk^2\sqrt{g}} + \frac{a^2c^2\sqrt{2ac}}{540g^2k^4\sqrt{g}} + \text{etc.}$$

COROLLARIUM 2

Si totus arcus descensus MC ponatur $= E$ et sequens arcus ascen-
$= F$ atque altitudo debita celeritati in $C = b$, erit

$$= k^2 - e^{\frac{-E}{k}}(k^2 + kE) = \frac{E^2}{2} - \frac{E^3}{3k} + \frac{E^4}{8k^2} - \frac{E^5}{30k^3} + \frac{E^6}{144k^4} - \text{etc.}$$

sito k negativo eodem modo invenitur

$$\frac{ab}{g} = \frac{F^2}{2} + \frac{F^3}{3k} + \frac{F^4}{8k^2} + \frac{F^5}{30k^3} + \frac{F^6}{144k^4} + \text{etc.}$$

s fit

$$F = E - \frac{2E^2}{3k} + \frac{4E^3}{9k^2} - \frac{44E^4}{135k^3} + \frac{104E^5}{405k^4} - \text{etc.}^{1)}$$

itudo debita celeritati maximae

$$c = \frac{gE^2}{2a} - \frac{gE^3}{3ak} + \frac{gE^4}{4ak^2} - \text{etc.}$$

litio princeps:
$$F = E - \frac{2E^2}{3k} + \frac{4E^3}{9k^2} - \frac{26E^4}{135k^3} + \frac{86E^5}{405k^4} + \text{etc.}$$ Correxit P. St.

COROLLARIUM 3

552. Quia F est arcus ascensus in prima dimidia
arcus F arcus descensus in sequente oscillatione; cum
arcus ascensus

$$G = E - \frac{4E^2}{3k} + \frac{16E^3}{9k^2} - \frac{328E^4}{135k^3} + \frac{1376E^5}{405k^4}$$

Atque simili modo sequentes oscillationes, quotquot lib

COROLLARIUM 4

553. Ex aequatione tempus exponente apparet te
M ad O pervenit, semper minus esse tempore, quo co
pertingit. Simili modo etiam arcus ON maior est qu
vero CN minor est arcu MC.

COROLLARIUM 5

554. Si oscillationes fuerint infinite parvae seu c
congruent oscillationes cum oscillationibus in vacuo fac
expressionibus iidem termini evanescent, qui evanesc
Minimis ergo oscillationibus isochronae erunt oscillati
dinis a in vacuo sollicitati a potentia g seu penduli i
$= 1$, cuius longitudo est $= \frac{a}{g}$.

COROLLARIUM 6

555. At si oscillationes fiant maiores, tempora osci
maiora; quare in hac resistentiae hypothesi cyclois taut
non gaudet. Quo enim in quaque oscillatione maior fu
maior quoque erit excessus temporis oscillationis hui
oscillationis minimae.

1) Editio princeps:

$$G = E - \frac{4E^2}{3k} + \frac{16E^3}{9k^2} - \frac{28E^4}{15k^3} + \frac{964E^5}{405k^4} - \text{etc}$$

SCHOLION 1

6. Quod diximus oscillationes minimas cum oscillationibus in vacuo re, locum habet, si a et k fuerint quantitates finitae magnitudinis. Si esset infinite magnum seu k infinite parvum, sequentes termini tempus ntes

$$\frac{\pi\sqrt{2a}}{\sqrt{g}}+\frac{\pi ac\sqrt{2a}}{12gk^2\sqrt{g}}+\text{etc.}$$

nescerent, etiamsi c esset infinite parvum. Tum igitur tantum oscil- minimae super curva quaecunque in vacuo et medio resistente inter runt, quando neque radius osculi curvae in infimo puncto fuerit in- agnus neque resistentia infinite magna.

EXEMPLUM

7. Exempli loco evolvamus casum, quo resistentia tam fit exigua k quantitas tam magna, ut fractiones, in quarum denominatoribus k luabus habet dimensiones, tuto pro nihilo haberi possint. Dicta igitur ne celeritati maximae in O debita c, ita ut sit $CO=\frac{ac}{gk}$, erit arcus ns

$$MC=E=\frac{\sqrt{2ac}}{\sqrt{g}}+\frac{2ac}{3gk}+\frac{ac\sqrt{2ac}}{18gk^2\sqrt{g}}$$

ns arcus ascensus

$$CN=F=\frac{\sqrt{2ac}}{\sqrt{g}}-\frac{2ac}{3gk}+\frac{ac\sqrt{2ac}}{18gk^2\sqrt{g}}.$$

venitur

$$\sqrt{c}=\frac{E\sqrt{g}}{\sqrt{2a}}-\frac{E^2\sqrt{g}}{3k\sqrt{2a}}+\frac{7E^3\sqrt{g}}{36k^2\sqrt{2a}}$$

$$c=\frac{gE^2}{2a}-\frac{gE^3}{3ak}+\frac{gE^4}{4ak^2}$$

$$F=E-\frac{2E^2}{3k}+\frac{4E^3}{9k^2}.$$

ergo dimidiae oscillationis per MCN est

$$=\frac{\pi\sqrt{2a}}{\sqrt{g}}+\frac{\pi E^2\sqrt{2a}}{24k^2\sqrt{g}}.$$

In sequente dimidia oscillatione est arcus descensus

$$= F = E - \frac{2E^2}{3k} + \frac{4E^3}{9k^2},$$

quem sequetur arcus ascensus

$$= G = E - \frac{4E^2}{3k} + \frac{16E^3}{9k^2};$$

atque tempus huius dimidiae oscillationis erit

$$= \frac{\pi\sqrt{2a}}{\sqrt{g}} + \frac{\pi E^2\sqrt{2a}}{24k^2\sqrt{g}} - \frac{\pi E^3\sqrt{}}{18k^3\sqrt{}}$$

ubi ultimus terminus negligi potest ob k^3 in denon
oscillatione est arcus descensus

$$= G = E - \frac{4E^2}{3k} + \frac{16E^3}{9k^2}$$

et arcus descensus

$$= H = E - \frac{6E^2}{3k} + \frac{36E^3}{9k^2}.$$

Atque generaliter in ea semioscillatione, quae indic
descensus

$$= E - \frac{2(n-1)E^2}{3k} + \frac{4(n-1)}{9k^2}$$

et arcus ascensus

$$= E - \frac{2nE^2}{3k} + \frac{4n^2E^3}{9k^2}.$$

Quamobrem post n semioscillationes corpus ab infi

$$E - \frac{2nE^2}{3k} + \frac{4n^2E^3}{9k^2},$$

qui minor est quam arcus descensus primae oscilla

$$\frac{2nE^2}{3k} - \frac{4n^2E^3}{9k^2}.$$

Tempus autem semioscillationis numero n indicata

$$= \frac{\pi\sqrt{2a}}{\sqrt{g}} + \frac{\pi E^2\sqrt{2a}}{24k^2\sqrt{g}} - \frac{\pi(n-1)E^3\sqrt{2a}}{18k^3\sqrt{g}}.$$

tus arcus primae semioscillationis MCN dicatur A, erit

$$A = 2E - \frac{2E^2}{3k} + \frac{4E^3}{9k^2} \quad \text{et} \quad E = \frac{A}{2} + \frac{A^2}{12k}$$

nte sponte termino sequente. Hinc totus arcus oscillatione per nu-
n indicata descriptus erit

$$E - \frac{2(2n-1)E^2}{3k} + \frac{4(2n^2-2n+1)E^3}{9k^2} = A - \frac{(n-1)A^2}{3k} + \frac{(n-1)^2A^3}{9k^2}.$$

COROLLARIUM 7

. Si n fiant oscillationes dimidiae et arcus descensus primae oscilla-
erit E et arcus ascensus ultimae $= L$, erit

$$L = E - \frac{2nE^2}{3k} + \frac{4n^2E^3}{9k^2},$$

pressio, si per seriem propius capiatur, fere congruet cum progressione
ca eiusdem initii hancque ob rem erit

$$L = \frac{3Ek}{3k+2nE} \quad \text{seu} \quad 3k(E-L) = 2nEL.$$

COROLLARIUM 8

. Hinc, si peractis aliquot semioscillationibus detur arcus descensus
oscillationis E una cum arcu ascensus ultimae L, inveniri potest
semioscillationum; namque est

$$n = \frac{3k(E-L)}{2EL}.$$

COROLLARIUM 9

Patet ergo diminutionem arcuum non a longitudine penduli pendere,
n et E datis idem reperitur arcus L, quaecunque fuerit longitudo
a. Atque est semper n proportionalis ipsi $\frac{1}{L} - \frac{1}{E}$.

561. Huiusmodi experimenta circa oscillationes
recenset NEUTONUS in *Phil.* Lib. II., ubi notat arcum
descensus ultimae oscillationis atque numerum oscilla
in aqua et mercurio.[1] Quare si haec media perfecte r
ritatum ratione, congrua esse deberent cum hisce for
arcus proportionale esset numero oscillationum et a
iunctim. Quod etiam locum habere observavi in m
quibus celeritas non est nimis exigua. At in oscillation
ratio ab hac regula conspicitur. Ex quo colligitur,
celeritas in fluido, eo propius resistentiam accedere
celeritatum, motum autem tardissimum alii resist
xium, quae in motibus celerioribus prae resistentia
tum est proportionalis, evanescat. In hisce quoq
resistentiam partim simplici celeritatum rationi, pa
duplicatae proportionalem assumsit neque tamen
satisfecit. In ultima vero *Phil.* editione[2] ipse NEUT
priorem theoriam suam agnoscit atque pluribus r
illam fluidorum resistentiam esse constantem seu t
tionalem, quam antea ipsis celeritatibus proportiona
ob rem istam resistentiam cum ea, quae quadra
tionalis, in sequente propositione coniunctam consi
aequationum resolutio et celeritatum determinatio
cilior evadat.

COROLLARIUM 10

562. Quod ad tempora oscillationum et semi
spicuum est ea decrescere, quo minores fiant arcus
plane evanescant, tempus dimidiae oscillationis for

$$= \frac{\pi\sqrt{2a}}{\sqrt{g}}.$$

1) I. NEWTON, *Philosophiae naturalis principia mathematic*
De motu et resistentia funependulorum. P. St.

2) Editio tertia, Londini 1726. P. St.

COROLLARIUM 11

563. Excessus autem cuiusque semioscillationis temporis supra temp inimae semioscillationis in casu resistentiae minimae est

$$\frac{\pi E^2 \sqrt{2a}}{24k^2\sqrt{g}}$$

notante E arcum descensus illius semioscillationis. Quare iste exces oportionalis est quadrato arcus descensus vel etiam quadrato totius ar mioscillatione descripti.

SCHOLION 3

564. Cyclois igitur, quae ab HUGENIO apta est demonstrata ad isoch smum pendulorum producendum, hanc proprietatem in medio resistente uplicata celeritatum ratione amittit et hanc ob rem in aere non inser si vel oscillationes sint valde parvae vel inter se proxime aequales. Ex ero, quod maiores oscillationes diutius durent, colligi licet veram curv utochronam in hac resistentiae hypothesi magis esse curvam quam cycloid uemadmodum scilicet cyclois in circulo eiusdem radii, cuius cyclois est fimo puncto, continetur, ita quoque vera tautochrona in cycloide continebi quo eius curvedo a puncto infimo magis decrescet quam curvedo cycloi

PROPOSITIO 64

PROBLEMA

565. *Si medii resistentia partim fuerit constans, partim quadratis celerita roportionalis, determinare motum oscillatorium corporis super cycloide M* 'ig. 66, p. 255), *saltem in casu, quo resistentia est valde parva.*

SOLUTIO

Sit ut ante diameter circuli generatoris $CD = \frac{1}{2}a$, $CP = x$ rcus $CM = s$. Ponatur celeritas in C debita altitudini b et celeritas in titudini v. Potentia corpus perpetuo deorsum sollicitans sit $= g$, esistentiae, quae est constans, sit $= h$ et pars resistentiae quadratis cel

tatum proportionalis sit $= \frac{v}{k}$ ut ante; erit k quant[illegible] v et s et a atque h valde parvum respectu g. Iam MC; erit

$$dv = -gdx + hds + \frac{vds}{k}$$

atque hinc

$$v = e^{\frac{s}{k}} b - e^{\frac{s}{k}} \int e^{\frac{-s}{k}} (gdx - hds)$$

At quia est ex natura cycloidis $dx = \frac{sds}{a}$, erit

$$\int e^{\frac{-s}{k}} gdx = \frac{gk^2 - gk^2 e^{\frac{-s}{k}} - gke^{\frac{-s}{k}}}{a}$$

et

$$\int e^{\frac{-s}{k}} hds = hk - hke^{\frac{-s}{k}};$$

unde fit

$$v = \frac{e^{\frac{s}{k}}(ab + hak - gk^2) - hak + gk^2}{a}$$

Celeritas maxima habetur, si fuerit

$$\frac{gs}{a} = h + \frac{v}{k}$$

seu

$$e^{\frac{s}{k}} = \frac{gk^2}{gk^2 - ab - hak}.$$

Dicatur altitudo debita celeritati maximae in O $=$

$$CO = \frac{ha}{g} + \frac{ac}{gk}$$

et

$$ab = gk^2 - hak - gk^2 e^{\frac{-hak - a}{gk^2}}$$

Ponatur arcus $MO = q$; erit

$$s = \frac{ha}{g} + \frac{ac}{gk} + q;$$

unde fit

$$v = \frac{ac + gk^2 + gkq - e^{\frac{q}{k}} gk^2}{a}.$$

minus est quam c, pono $c - v = z$; erit

$$az + gk^2 + gkq = e^{\frac{q}{k}} gk^2.$$

o in seriem conversa dat ut supra

$$\frac{az}{g} = \frac{q^2}{2} + \frac{q^3}{6k} + \frac{q^4}{24k^2}$$

$$q = \frac{\sqrt{2az}}{\sqrt{g}} - \frac{az}{3gk} + \frac{az\sqrt{2az}}{18gk^2\sqrt{g}}.$$

nsus ex M; erit ibi $v = 0$ et $z = c$ ideoque

$$MO = \frac{\sqrt{2ac}}{\sqrt{g}} - \frac{ac}{3gk} + \frac{ac\sqrt{2ac}}{18gk^2\sqrt{g}}.$$

mula reperitur arcus ascensus

$$ON = \frac{\sqrt{2ac}}{\sqrt{g}} + \frac{ac}{3gk} + \frac{ac\sqrt{2ac}}{18gk^2\sqrt{g}};$$

his h non reperiatur, erit ut supra tempus semioscillationis

$$= \frac{\pi\sqrt{2a}}{\sqrt{g}} + \frac{\pi ac\sqrt{2a}}{12gk^2\sqrt{g}}.$$

rcus descensus MC erit

$$= \frac{ha}{g} + \frac{\sqrt{2ac}}{\sqrt{g}} + \frac{2ac}{3gk} + \frac{ac\sqrt{2ac}}{18gk^2\sqrt{g}}$$

scensus

$$CN = -\frac{ha}{g} + \frac{\sqrt{2ac}}{\sqrt{g}} - \frac{2ac}{3gk} + \frac{ac\sqrt{2ac}}{18gk^2\sqrt{g}}.$$

s descensus MC ponatur E et arcus ascensus $CN = F$, erit

$$F = E - \frac{2ha}{g} - \frac{2E^2}{3k} + \frac{4haE}{3gk} + \frac{4E^3}{9k^2}.$$

In sequente semioscillatione est arcus descensus F e

$$G = E - \frac{4ha}{g} - \frac{4E^2}{3k} + \frac{16haE}{3gk} +$$

Atque generaliter in ea semioscillatione, quae inc ascensus est

$$= E - \frac{2nha}{g} - \frac{2nE^2}{3k} + \frac{4n^2haE}{3gk} + \frac{4n^2E^3}{9k^2} =$$

Quare si peractis n semioscillationibus dicatur arcu arcus ascensus ultimae L, erit

$$2gnEL = 3gk(E - L) - 6hn$$

seu

$$n = \frac{3gk(E - L)}{2gEL + 6hak}.$$

Tempus vero, quo quaelibet semioscillatio per MC

$$= \frac{\pi\sqrt{2a}}{\sqrt{g}} + \frac{\pi(gE - ha)^2\sqrt{2a}}{24g^3k^2\sqrt{g}}$$

loco c eius valore substituto. Q. E. I.

COROLLARIUM 1

566. Si ponatur $c = 0$, ut locus prodeat, in q invenitur

$$MC = \frac{ha}{g};$$

corpus ergo in quiete permanere potest non solum quoque in distantia $\frac{ha}{g}$ cis et ultra C. Quare in h ex statu quietis penduli non exacte linea vertica angulo, cuius sinus est $\frac{h}{g}$, aberrari potest.

SCHOLION 1

567. Huiusmodi resistentiam in aqua locum h evincitur, quippe in motibus tardissimis resisten minime proportionalis observatur; in fluido vero prae

eritatum proportionalem aliam non dari probabile est, nisi resistent stantem. Confirmatur hoc etiam experimentis a LA HIRIO institutis, monstravit pendulum in aqua extra situm verticalem in quiete nere posse. Quod fieri non posset, si resistentia a sola celeritate et. Ex experimentis NEUTONI, quae circa retardationem motus pendulo aere instituit, concludi potest globi plumbei diametri 2 dig. resistent stantem esse circiter partem millionesimam gravitatis seu $\frac{h}{g} = \frac{1}{10000}$ ergo globus filo suspensus a linea verticali aberrare potest angulo er] 10″, qui autem error est insensibilis. Maior autem et sensibilis poterit error, quo minor simulque levior globus adhibeatur.

COROLLARIUM 2

568. Ad hunc angulum inveniendum inservit ista aequatio ex super 565] deducta

$$\frac{h}{g} = \frac{E-L}{2na} - \frac{EL}{3ak}$$

sinui anguli, quo pendulum a linea verticali declinare potest. At loc um parvum accipi convenit, quo termini neglecti eo magis fiant insensib

COROLLARIUM 3

569. Ex aequatione

$$n = \frac{3gk(E-L)}{2gEL + 6hak}$$

paret, quo maior sit arcus oscillatione descriptus, eo minorem fieri to n $6hak$ respectu $2gEL$. Atque hoc in causa est, quod haec resiste tum in minimis oscillationibus sentiatur.

COROLLARIUM 4

570. Quia h est numerus tum per hypothesin valde parvus tum in bus fluidis, ad quae haec propositio est accommodata, reipsa fere ev

1) I. NEWTON, *Philosophiae naturalis principia mathematica*, Londini 1687, Lib. II secti motu et resistentia corporum funependulorum, Scholium generale. P. St.

scens, in expressione temporis evanescet quoque ha pr
unius semioscillationis erit

$$= \frac{\pi\sqrt{2a}}{\sqrt{g}} + \frac{\pi E^2\sqrt{2a}}{24k^2\sqrt{g}}.$$

Resistentia igitur constans non immutabit tempora osc

SCHOLION 2

571. Etiamsi ergo haec resistentia constans cun
celeritatum proportionali coniuncta consideretur, calculu
neque difficilior. Nam ex celeritate maxima $\sqrt{c}$ totus arc
descriptus eodem modo determinatur, sive haec resisten
non; utroque enim casu plane eadem obtinetur aequati
hoc ipso sequi videtur hanc resistentiae legem in natu
vero resistentias praeter hanc et eam, quae quadrati
portionalis, actu non inveniri. Fluida autem iam
duplicem resistentiam exercere observata sunt, alteram
proportionalem, quae in motibus celerioribus sola c
motibus tardissimis tantum sensibilem. Illa resistent
particularum fluidi et per eam corpus de motu suo
culas eas removet; quam quadratis celeritatum propo
nequit. Haec vero resistentia a tenacitate fluidi ortum
fluidi inter se cohaerent et difficulter a se invicem se
corpus per datum spatium movetur, datus particularu
proportionalis a se invicem divelli debet; quare haec r
potentia absoluta motum corporis retardante, quippe q
spatia aequalem ictuum numerum in corpus exerit.
seu vis motui corporis semper est contraria et secund
motus in corpus agit atque ideo est vis tangentiali
retardans. At hoc casu natura a calculo exceptio
corpus quiescit. Quoniam enim haec vis est constan
in corpus quiescens ac in motum; quiescens autem co
culas non divellit, hanc vim sentire nequit. Accedit a
vis directioni motus sit contraria, ea in corpus quiescen
directionem, nullum effectum habere queat. At si m
investigatur, tangens curvae semper pro directione m

pus actu quiescat, atque ideo calculus effectum huius vis etiam in cor[...]
escente ostendit; hoc igitur casu a calculo exceptionem fieri opo[...]
rpus pendulum ergo per aliquod parvum spatium circa C in quiete [...]
nere posse ideo est dicendum, quia eius nisus versus C non sufficit
ticulas fluidi a se invicem separandas. Quare corpus quiescere potes[...]
libet puncto illius spatioli, etiamsi calculus ostendat etiam in ipso pu[...]
corpus non in quiete perseverare posse.

SCHOLION 3

572. Ex his, quae partim generaliter tradidimus, partim de cycloide [...]
mus, perspicitur, quomodo in medio resistente in duplicata ratione ce[...]
um motus corporis super quacunque curva possit determinari. Consid[...]
nus quidem medium resistens uniforme et potentiam sollicitantem qu[...]
uabilem; sed ex aequatione resolvenda apparet eam quoque integrari p[...]
modocunque tum medium sit difforme tum potentia sollicitans variab[...]
per enim in aequatione altitudo celeritati debita v unicam tantum h[...]
ensionem. Progredior igitur ad alias medii resistentis hypotheses; [...]
a tum non pro quavis curva motus potest definiri, curvae primo sunt
iendae, quae determinationem motus admittunt. Assumimus hic au[...]
ta institutum nostrum eas curvas, quae ad aequationem homogeneam
unt, in qua indeterminatae ubique eundem obtinent dimensionum numer[...]
resistentia fuerit potestati celeritatum exponentis $2m$ proportionalis, hab[...]
aequatio

$$dv = \pm g dx \pm \frac{v^m ds}{k^m};$$

ae quo sit homogenea inter v et x, debet esse

$$ds = x^{-m} dx \quad \text{seu} \quad s = a^m x^{1-m} \quad \text{seu} \quad x = a^{\frac{m}{m-1}} s^{\frac{1}{1-m}}.$$

si x et s datis quantitatibus augeantur vel diminuantur, in curva, c[...]
c est aequatio

$$x = a^{\frac{m}{m-1}}(s+f)^{\frac{1}{1-m}} - a^{\frac{m}{m-1}} f^{\frac{1}{1-m}},$$

tus quoque determinari potest. In medio ergo resistente in sim[...]
ione celeritatum curva fit cyclois ideoque motum super ea determine[...]

PROPOSITIO 65

PROBLEMA

573. *In medio, quod resistit in simplici ratione celeritatum, dete oscillatorium corporis super cycloide ACB* (Fig. 66, p. 255) *existe quam potentia sollicitante uniformi.*

SOLUTIO

Sit iterum ut ante diameter circuli generatoris $CD =$ $CP = x$ et arcus $CM = s$. Ponatur celeritas in C debita altit leritas in M altitudini v. Potentia corpus perpetuo deorsum t et resistentia $= \frac{\sqrt{v}}{\sqrt{k}}$. Fiat super parte AMC descensus; erit ex nat

$$dv = -g\,dx + \frac{ds\sqrt{v}}{\sqrt{k}} = -\frac{gs\,ds}{a} + \frac{ds\sqrt{v}}{\sqrt{k}}.$$

Ponatur

$$\frac{\sqrt{v}}{\sqrt{k}} = \frac{u}{a};$$

erit

$$v = \frac{ku^2}{a^2} \quad \text{et} \quad dv = \frac{2kudu}{a^2},$$

unde fit

$$2kudu = -gasds + auds,$$

quae aequatio ita debet integrari, ut facto $s = 0$ fiat $u = \frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{k}}$. vero super arcu CN haec habetur aequatio

$$2kudu = -gasds - auds.$$

Ponatur $u = ps$; habebitur pro descensu

$$2kp^2sds + 2kps^2dp = -gasds + apsds$$

seu

$$\frac{2kpdp}{ap - ga - 2kp^2} = \frac{ds}{s}.$$

integrando

$$= lC - \frac{1}{2} l\left(p^2 - \frac{ap}{2k} + \frac{ga}{2k}\right) + \frac{a}{2\sqrt{(a^2 - 8gak)}} l \frac{4kp - a + \sqrt{(a^2 - 8gak)}}{4kp - a - \sqrt{(a^2 - 8gak)}}$$

$$\frac{1}{2} l \frac{2a^2 v\sqrt{k} - a^2 s\sqrt{v} + gas^2\sqrt{k}}{2ks^2\sqrt{k}} + \frac{a}{2\sqrt{(a^2 - 8gak)}} l \frac{4a\sqrt{kv} - as + s\sqrt{(a^2 - 8gak)}}{4a\sqrt{kv} - as - s\sqrt{(a^2 - 8gak)}}$$

tata significatione litterae C

$$(2a^2 v\sqrt{k} - a^2 s\sqrt{v} + gas^2\sqrt{k}) - \frac{a}{\sqrt{(a^2 - 8gak)}} l \frac{4a\sqrt{kv} - as + s\sqrt{(a^2 - 8gak)}}{4a\sqrt{kv} - as - s\sqrt{(a^2 - 8gak)}}.$$

$s = 0$ et $v = b$; fiet $lC = l2a^2 b\sqrt{k}$; hinc fiet

$$\frac{2av\sqrt{k} - as\sqrt{v} + gs^2\sqrt{k}}{2ab\sqrt{k}} = \left(\frac{4a\sqrt{kv} - as + s\sqrt{(a^2 - 8gak)}}{4a\sqrt{kv} - as - s\sqrt{(a^2 - 8gak)}}\right)^{\frac{a}{\sqrt{(a^2 - 8gak)}}}.$$

a vero curvae parte CN pro ascensu corporis posito $CN = s$ habetur quatio

$$\frac{2av\sqrt{k} + as\sqrt{v} + gs^2\sqrt{k}}{2ab\sqrt{k}} = \left(\frac{4a\sqrt{kv} + as - s\sqrt{(a^2 - 8gak)}}{4a\sqrt{kv} + as + s\sqrt{(a^2 - 8gak)}}\right)^{\frac{a}{\sqrt{(a^2 - 8gak)}}}.$$

ndo celeritati maximae, quae sit in O, debita dicatur c, erit

$$CO = \frac{a\sqrt{c}}{g\sqrt{k}}$$

$$c = b\left(\frac{4gk - a + \sqrt{(a^2 - 8gak)}}{4gk - a - \sqrt{(a^2 - 8gak)}}\right)^{\frac{a}{\sqrt{(a^2 - 8gak)}}}.$$

e autem aequationes locum non habent, nisi sit $a^2 > 8gak$ seu $k < \frac{a}{8g}$. i $k > \frac{a}{8g}$, aequationes a logarithmis et quadratura circuli simul unt.

namus esse $k = \frac{a}{8g}$ eritque

$$\frac{ds}{s} = \frac{-pdp}{\left(p - \frac{a}{4k}\right)^2} = \frac{-dp}{p - \frac{a}{4k}} - \frac{adp}{4k\left(p - \frac{a}{4k}\right)^2}.$$

PROPOSITIO 65

PROBLEMA

573. *In medio, quod resistit in simplici ratione celeritatum* [...] *oscillatorium corporis super cycloide* ACB (Fig. 66, p. 255) [...] *quam potentia sollicitante uniformi.*

SOLUTIO

Sit iterum ut ante diameter circuli generatoris [...] $CP = x$ et arcus $CM = s$. Ponatur celeritas in C debita [...] leritas in M altitudini v. Potentia corpus perpetuo deors[...] et resistentia $= \frac{\sqrt{v}}{\sqrt{k}}$. Fiat super parte AMC descensus; erit

$$dv = -g\,dx + \frac{ds\sqrt{v}}{\sqrt{k}} = -\frac{gs\,ds}{a} + \frac{ds\sqrt{v}}{\sqrt{k}}.$$

Ponatur

$$\frac{\sqrt{v}}{\sqrt{k}} = \frac{u}{a};$$

erit

$$v = \frac{ku^2}{a^2} \quad \text{et} \quad dv = \frac{2kudu}{a^2},$$

unde fit

$$2kudu = -gasds + auds,$$

quae aequatio ita debet integrari, ut facto $s = 0$ fiat $u =$ [...] vero super arcu CN haec habetur aequatio

$$2kudu = -gasds - auds.$$

Ponatur $u = ps$; habebitur pro descensu

$$2kp^2sds + 2kps^2dp = -gasds + apsds$$

seu

$$\frac{2kpdp}{ap - ga - 2kp^2} = \frac{ds}{s}.$$

ntegrando

$$= lC - \frac{1}{2} l\left(p^2 - \frac{ap}{2k} + \frac{ga}{2k}\right) + \frac{a}{2\sqrt{(a^2 - 8gak)}}\, l\frac{4kp - a + \sqrt{(a^2 - 8gak)}}{4kp - a - \sqrt{(a^2 - 8gak)}}$$

$$l\frac{2a^2v\sqrt{k} - a^2s\sqrt{v} + gas^2\sqrt{k}}{2ks^2\sqrt{k}} + \frac{a}{2\sqrt{(a^2 - 8gak)}}\, l\frac{4a\sqrt{kv} - as + s\sqrt{(a^2 - 8gak)}}{4a\sqrt{kv} - as - s\sqrt{(a^2 - 8gak)}}$$

ata significatione litterae C)

$$2a^3v\sqrt{k} - a^2s\sqrt{v} + gas^2\sqrt{k}) - \frac{a}{\sqrt{(a^2 - 8gak)}}\, l\frac{4a\sqrt{kv} - as + s\sqrt{(a^2 - 8gak)}}{4a\sqrt{kv} - as - s\sqrt{(a^2 - 8gak)}}.$$

$s = 0$ et $v = b$; fiet $lC = l2a^3b\sqrt{k}$; hinc fiet

$$\frac{2av\sqrt{k} - as\sqrt{v} + gs^2\sqrt{k}}{2ab\sqrt{k}} = \left(\frac{4a\sqrt{kv} - as + s\sqrt{(a^2 - 8gak)}}{4a\sqrt{kv} - as - s\sqrt{(a^2 - 8gak)}}\right)^{\frac{a}{\sqrt{(a^2 - 8gak)}}}.$$

vero curvae parte CN pro ascensu corporis posito $CN = s$ habetur uatio

$$\frac{2av\sqrt{k} + as\sqrt{v} + gs^2\sqrt{k}}{2ab\sqrt{k}} = \left(\frac{4a\sqrt{kv} + as - s\sqrt{(a^2 - 8gak)}}{4a\sqrt{kv} + as + s\sqrt{(a^2 - 8gak)}}\right)^{\frac{a}{\sqrt{(a^2 - 8gak)}}}.$$

lo celeritati maximae, quae sit in O, debita dicatur c, erit

$$CO = \frac{a\sqrt{c}}{g\sqrt{k}}$$

$$c = b\left(\frac{4gk - a + \sqrt{(a^2 - 8gak)}}{4gk - a - \sqrt{(a^2 - 8gak)}}\right)^{\frac{a}{\sqrt{(a^2 - 8gak)}}}.$$

autem aequationes locum non habent, nisi sit $a^2 > 8gak$ seu $k < \frac{a}{8g}$. $k > \frac{a}{8g}$, aequationes a logarithmis et quadratura circuli simul t.

amus esse $k = \frac{a}{8g}$ eritque

$$\frac{ds}{s} = \frac{-pdp}{\left(p - \frac{a}{4k}\right)^2} = \frac{-dp}{p - \frac{a}{4k}} - \frac{adp}{4k\left(p - \frac{a}{4k}\right)^2}.$$

Integrando ergo prodibit

$$ls = lC - l\left(p - \frac{a}{4k}\right) + \frac{a}{4kp - a} = lC - l\left(\frac{a\sqrt{v}}{s\sqrt{k}} - \frac{a}{4k}\right) -$$

[seu mutata significatione litterae C]

$$= lC - l(4a\sqrt{kv} - as) + ls + \frac{as}{4a\sqrt{kv} - as}$$

Fit igitur $lC = l4a\sqrt{kb}$; unde habebitur

$$l\frac{4\sqrt{kv}-s}{4\sqrt{kb}} = \frac{s}{4\sqrt{kv}-s}.$$

Apparet hinc in descensu celeritatem nusquam esse posse $4\sqrt{kv}$ maius esse debet quam s. Hoc ergo casu, si celerit realis, descensus initium fit imaginarium. Quare ubicunqu inceperit, celeritas in puncto infimo C erit $= 0$. Ad mo gandum, si descensus fit ex puncto dato E fueritque CE

$$lC = l - af + 1$$

ideoque

$$l\frac{s - 4\sqrt{kv}}{f} = \frac{4\sqrt{kv}}{4\sqrt{kv}-s}.$$

Ex quo intelligitur semper esse debere $4\sqrt{kv} < s$, quamo ubi $s = 0$, debet quoque esse $v = 0$. Maxima celeritas, qua ponendo

$$\sqrt{v} = \frac{gs\sqrt{k}}{a} \quad \text{seu} \quad s = 8\sqrt{kv},$$

quo posito prodit

$$l\frac{s}{2f} = -1 \quad \text{seu} \quad s = \frac{2f}{e} = CO$$

denotante e numerum, cuius logarithmus est $= 1$. His ig arcus descensus est realis, nullus est arcus ascensus. At s CN celeritate initiali in C altitudini b debita ascendat, m exprimetur

$$l\frac{4\sqrt{kv}+s}{4\sqrt{kb}} = \frac{-s}{4\sqrt{kv}+s},$$

ex qua patet esse

$$s + 4\sqrt{kv} < 4\sqrt{kb} \quad \text{et} \quad \sqrt{v} < \sqrt{b} - \frac{s}{4\sqrt{k}}.$$

est $k < \frac{a}{8g}$, quem casum iam tractavimus, resistentia adhuc fit maior, em multo magis celeritas in C erit $= 0$, si quidem descensus ex lato fiat, atque pro data celeritate in C initium descensus erit imaginarium. Quamobrem aequatio, quam pro descensu dedimus, est imaginaria, tans determinetur ex dato descensus initio. Sit igitur arcus $CE = f$;

$$lC = lgaf^2\sqrt{k} - \frac{a}{\sqrt{(a^2 - 8gak)}}\, l\frac{a - \sqrt{(a^2 - 8gak)}}{a + \sqrt{(a^2 - 8gak)}}$$

$s = 0$ erit

$$l\frac{gf^2}{2av} = \frac{a}{\sqrt{(a^2 - 8gak)}}\, l\frac{a - \sqrt{(a^2 - 8gak)}}{a + \sqrt{(a^2 - 8gak)}}\text{[1]},$$

esset $= 0$; nam si v est $= 0$, haec aequatio non valet. Apparet anc aequationem contradictionem continere, quia $2av$ maius esse uam gff seu $2v > \frac{gss}{a}$ posito s pro f. At est $\frac{ss}{a} = 2x$ atque ita esset uod est absurdum; nam in vacuo est tantum $v = gx$ atque in medio adhuc minor esse debet. Pro ascensu autem inservit aequatio inque ex ea totus arcus ascensus CN reperitur faciendo $v = 0$, quo odit

$$\frac{gs^2}{2ab} = \left(\frac{a - \sqrt{(a^2 - 8gak)}}{a + \sqrt{(a^2 - 8gak)}}\right)^{\frac{a}{\sqrt{(a^2 - 8gak)}}} = \frac{g \cdot CQ}{b}.$$

is igitur perspicitur, si fuerit vel $k < \frac{a}{8g}$ vel $k = \frac{a}{8g}$, oscillationes peragi e, quia post nullum descensum ascensus sequi potest. Quare nobis m reliqui casus, quibus est $k > \frac{a}{8g}$, sunt investigandi; quia enim in entia est minor atque quantumvis parva assumi potest, oscillationes rfici poterunt. Factis ergo superioribus substitutionibus habemus

$$\frac{-ds}{s} = \frac{pdp}{p^2 - \frac{ap}{2k} + \frac{ga}{2k}},$$

---

tio princeps: *factoque* $s = 0$ *erit* $l\frac{gf^2}{av} = -\frac{a}{\sqrt{(a^2 - 8gak)}}\, l\frac{a - \sqrt{(a^2 - 8gak)}}{a + \sqrt{(a^2 - 8gak)}}$. Quamobrem lae sequentes corrigendae erant; nihilominus EULERI conclusio valet. P. St.

quae aequatio posito $q = p - \frac{a}{4k}$ abit in hanc

$$\frac{-ds}{s} = \frac{qdq + \frac{adq}{4k}}{qq + \frac{ga}{2k} - \frac{a^2}{16k^2}}.$$

Ponatur

$$\frac{ga}{2k} - \frac{a^2}{16k^2} = B^2,$$

quia est quantitas affirmativa, eritque

$$lC - ls = l\sqrt{(q^2 + B^2)} + \frac{a}{4k}\int \frac{dq}{q^2 + B^2} = l\sqrt{(q^2 + B^2)}$$

ubi $At. \frac{q}{B}$ est arcus circuli, cuius tangens est $\frac{q}{B}$ existent
stituto autem pro q valore debito erit (mutata significat

$$lC = l\sqrt{(2av\sqrt{k} - as\sqrt{v} + gs^2\sqrt{k})} + \frac{a}{4Bk} At. ^{4}$$

Ponatur ad lC definiendum $s = 0$ et $v = b$; erit

$$lC = l\sqrt{2ab\sqrt{k}} + \frac{a}{4Bk} At. \infty,$$

quare erit

$$l\frac{\sqrt{2ab\sqrt{k}}}{\sqrt{(2av\sqrt{k} - as\sqrt{v} + gs^2\sqrt{k})}} = -\frac{a}{4Bk} At. \frac{4}{4a\sqrt{}}$$

Pro ascensu vero per arcum CN invenitur

$$l\frac{\sqrt{2ab\sqrt{k}}}{\sqrt{(2av\sqrt{k} + as\sqrt{v} + gs^2\sqrt{k})}} = \frac{a}{4Bk} At. \frac{4B}{4a\sqrt{k}}$$

Posito nunc $v = 0$ prodit integer arcus descensus MC c

$$l\sqrt{\frac{2ab}{gss}} = \frac{a}{4Bk} At. \frac{4Bk}{a} = l\sqrt{\frac{b}{g \cdot CP}}.$$

Atque totus arcus ascensus CN inveniatur ex hac aequa

$$l\sqrt{\frac{2ab}{gss}} = \frac{a}{4Bk} At. \frac{4Bk}{a} = l\sqrt{\frac{b}{g \cdot CQ}}.$$

Ex his aequationibus quanquam videantur arcus ascensus et desce
er se aequales, tamen sunt inaequales; dantur enim infiniti arcus, quo
gens est eadem $\frac{4Bk}{a}$, atque pro ascensu alius accipi debet, alius
censu. Atque cum infiniti dentur arcus tangentis $\frac{4Bk}{a}$, quilibet corum
positum accommodari potest. His enim sumtis arcubus in ordine
nt successive omnes arcus tam ascensus quam descensus, quamdiu co
illationes peragit; nam quia aequatio inventa est generalis, ea omnia
endere debet, in quibus corporis oscillantis celeritas unquam est
are in hac resistentiae hypothesi hoc habetur commodum, quod statim
libet oscillatione, centesima v. gr., arcus tam descensus quam asce
sit definiri. Sit arcus D, cuius tangens est $\frac{4Bk}{a}$, et posita ratione
tri ad peripheriam $1:\pi$ erit eadem tangens $\frac{4Bk}{a}$ omnium horum arc

$$D, \quad \pi + D, \quad 2\pi + D, \quad 3\pi + D \quad \text{etc.}$$

arcu descensus nunc primae oscillationis MC sumi debet arcus D eri

$$\frac{2ab}{gss} = e^{\frac{Da}{2Bk}}$$

abscissa arcus MC

$$= \frac{b}{g} e^{\frac{-Da}{2Bk}}.$$

cissa autem arcus ascensus sequentis seu abscissa arcus descensus secu
nioscillationis erit

$$= \frac{b}{g} e^{\frac{-a(\pi+D)}{2Bk}}.$$

ili modo abscissa arcus descensus in tertia semioscillatione erit

$$= \frac{b}{g} e^{\frac{-a(2\pi+D)}{2Bk}}.$$

ue generaliter abscissa arcus descensus in oscillatione, quae indicatur
+ 1, est

$$= \frac{b}{g} e^{\frac{-a(n\pi+D)}{2Bk}},$$

e simul est abscissa arcus ascensus in oscillatione, quae indicatur nume
d ad tempora oscillationum attinet, ea sequenti propositioni reserva
E. I.

COROLLARIUM 1

574. Nisi ergo fuerit $k > \frac{a}{8g}$, oscillationes absolvi
finito primo descensu corpus ad quietem redigitur, si ve
At si $k > \frac{a}{8g}$, oscillationes perpetuo durabunt, quia

$$\frac{b}{g} e^{\frac{-a(n\pi + D)}{2Bk}}$$

neque evanescere neque negativa fieri potest.

COROLLARIUM 2

575. Arcus descensus se habet ad arcum sequent
ratione; est enim abscissarum ratio

$$\frac{b}{g} e^{\frac{-Da}{2Bk}} \quad \text{ad} \quad \frac{b}{g} e^{\frac{-a(\pi + D)}{2Bk}}$$

ideoque ipsorum arcuum 1 ad $e^{\frac{-\pi a}{4Bk}}$, quae ratio non pendo

COROLLARIUM 3

576. Atque simili modo arcus descensus primae
arcum ascensus semioscillationis numero n indicatae da
est enim haec ratio ut $e^{\frac{\pi n a}{4Bk}}$ ad 1. Quare si numer
duplo fit maior, haec ratio fit duplicata.

COROLLARIUM 4

577. Arcus descensus quotcunque semioscillationum
stituunt progressionem geometricam decrescentem in ratio
ideo integri etiam arcus semioscillationibus descripti c
geometrica eiusdem denominatoris.

SCHOLION 1

Quia autem pro D infiniti arcus accipi possunt, quo appareat, qui-
iis pro arcu descensus accipi debeat, sumo casum, quo $k = \frac{a}{8g}$
us ascensus $= \frac{4\sqrt{kb}}{c}$ seu eius abscissa

$$= \frac{8kb}{ac^2} = \frac{b}{g} e^{-2};$$

casu est $B = 0$ atque abscissa arcus ascensus

$$= \frac{b}{g} e^{\frac{-a(\pi + D)}{2Bk}}.$$

esse

$$\frac{a(\pi + D)}{2Bk} = 2 \quad \text{et} \quad \pi + D = \frac{4Bk}{a} = 0.$$

$\frac{Bk}{a}$ tangens arcus $\pi + D$, et cum $\frac{4Bk}{a}$ sit $= 0$, debet $\pi + D$ esse
quo intelligitur $\pi + D$ esse minimum arcum tangenti $\frac{4Bk}{a}$ respon-
Dicatur ergo minimus arcus tangenti $\frac{4Bk}{a}$ respondens E; erit
π. Quocirca in prima semioscillatione erit abscissa arcus descensus

$$= \frac{b}{g} e^{\frac{a(\pi - E)}{2Bk}} = \frac{MC^2}{2a}$$

se arcus MC

$$= e^{\frac{a(\pi - E)}{4Bk}} \sqrt{\frac{2ab}{g}}.$$

$\frac{Bk}{a}$ seu tangens arcus $E = \tau$; erit arcus descensus primae semi-
s

$$= e^{\frac{\pi - E}{\tau}} \sqrt{\frac{2ab}{g}},$$

nsus primae seu arcus descensus secundae semioscillationis

$$= e^{\frac{-E}{\tau}} \sqrt{\frac{2ab}{g}}$$

s descensus in semioscillatione, quae indicatur numero $n + 1$, erit

$$= e^{\frac{-E-(n-1)\pi}{\tau}} \sqrt{\frac{2ab}{g}},$$

qui est similar arcu...
gressionis geometricae ergo, quam hi arcus ascensus constitu... nator est $e^{\frac{-\pi}{\tau}}$.

COROLLARIUM 5

579. Ex his etiam in qualibet semioscillatione celeritas in C potest definiri. Sit enim in semioscillatione, quae numero ... celeritas in C debita altitudini β; erit arcus ascensus

$$= e^{\frac{-E}{\tau}} \sqrt{\frac{2a\beta}{g}},$$

qui aequalis esse debet ipsi

$$e^{\frac{-E-(n-1)\pi}{\tau}} \sqrt{\frac{2ab}{g}}.$$

Hinc fit

$$\sqrt{\beta} = e^{\frac{-(n-1)\pi}{\tau}} \sqrt{b}.$$

Celeritates ergo in puncto C in semioscillationibus successivis ... geometricam quoque constituunt, cuius denominator est $e^{\frac{-\pi}{\tau}}$.

COROLLARIUM 6

580. Si n ponatur numerus negativus, semioscillationes, q... mam factae esse possent, cognoscuntur; ut in semioscillatione ... cedente arcus descensus esse debuisset

$$= e^{\frac{2\pi-E}{\tau}} \sqrt{\frac{2ab}{g}}.$$

COROLLARIUM 7

581. Si in prima semioscillatione descensus fiat ex pu... supremo A, erit arcus descensus $= a$. Quare est

$$\sqrt{\frac{ag}{2b}} = e^{\frac{\pi-E}{\tau}}$$

et celeritas in puncto infimo C seu $\sqrt{b}$ erit

$$e^{\frac{E-\pi}{\tau}} \sqrt{\frac{ga}{2}}.$$

COROLLARIUM 8

582. Si resistentia fere evanescat seu k fuerit quantitas veheme
gna, erit

$$B = \sqrt{\frac{ga}{2k}} \quad \text{et} \quad \tau = \frac{4\sqrt{gk}}{\sqrt{2a}} = \frac{2\sqrt{2gk}}{\sqrt{a}}.$$

n igitur sit τ valde magnum, erit $E = \frac{\pi}{2}$ atque arcus descensus pri
nioscillationis

$$= e^{\frac{\pi}{2\tau}}\sqrt{\frac{2ab}{g}} = \left(1 + \frac{\pi}{2\tau}\right)\sqrt{\frac{2ab}{g}}$$

arcus ascensus

$$= \left(1 - \frac{\pi}{2\tau}\right)\sqrt{\frac{2ab}{g}}.$$

SCHOLION 2

583. Ex solutione huius propositionis inter cetera intelligi potest, qu
cumspectione saepe opus sit ad conclusiones ex aequationibus deducen
m in casu $k < \frac{a}{8g}$ aequationes, quas pro descensu et ascensu inveni
sunt comparatae, ut ex iis sequi videatur arcum ascensus aequalem
ui descensus; nam facto $v = 0$ ex utraque aequatione prodit

$$\frac{gs^2}{2ab} = \left(\frac{a - \sqrt{(a^2 - 8gak)}}{a + \sqrt{(a^2 - 8gak)}}\right)^{\frac{a}{\sqrt{(a^2 - 8gak)}}}.$$

que hoc ita se quoque haberet, nisi descensus necessario faceret b
sito autem $b = 0$ nullus datur ascensus et aequatio pro descensu pro
immutanda. Quare nisi ex casu, quo $k = \frac{a}{8g}$, advertissemus b esse
ficulter ex aequatione veritas cognosci potuisset. Idem quoque accidit,
eadem hypothesi $k < \frac{a}{8g}$ descensu ex dato puncto facto celeritaten
ncto C investigavimus; posito enim $s = 0$ aequatio ad absurdum ded
enim est comparata illa aequatio, ut facto $s = 0$ non ostendat esse qu
$= 0$, etiamsi revera sit $v = 0$; ii enim tantum termini sunt neglecti
ibus reperiebatur s, cum reliqui v continentes eodem iure negligi del
it. Inveniri ergo non potest esse $v = 0$, si $s = 0$; sed quia ex aequat
surdum sequitur, nisi esset $v = 0$, ex hoc concludi potest esse $v = 0$
$= 0$. In aliis vero casibus, in quibus absurdum non tam facile perspic
ficulter lapsus evitari poterit.

PROPOSITIO 66

THEOREMA

581. *In medio uniformi, quod resistit in simplici c*
descensus super cycloide AMC (Fig. 66, p. 255) *fiunt ae*
similiter etiam omnes ascensus super cycloide CNB aeq
cantur, si quidem potentia sollicitans fuerit uniformis et

DEMONSTRATIO

Pro descensu, si dicatur arcus $CM = s$ et altit
$M = v$, habetur ista aequatio

$$dv = -\frac{gsds}{a} + \frac{ds\sqrt{v}}{\sqrt{k}}.$$

Ponatur $\sqrt{v} = u$; erit u ut ipsa celeritas in M atquo
ista aequatio

$$2udu = -\frac{gsds}{a} + \frac{uds}{\sqrt{k}},$$

in qua u et s ubique eundem tenent dimensionum n
natur initium descensus in E et arcus $CE = f$ et in
sita, ita ut fiat $u = 0$ posito $s = f$, prodibit aequatio
et s ubique eundem dimensionum numerum const
aequabitur u functioni unius dimensionis ipsarum f
tum temporis $\frac{ds}{u}$ erit functio nullius dimensionis ipsa
ds. Eius ergo integrale ita acceptum, ut evanescat
quoque nullius dimensionis ipsarum f et s et exhib
CM. In hac igitur functione si ponatur $s = f$, ov
functione aequabiturque tempus totius descensus per
titatibus constantibus g, a et k tantum compositae,
alia quantitas punctum E respiciens ingredietur.
scensus per EC eadem exprimetur quantitate, ubicunq
atque ideo omnes descensus aequalibus absolventur te
tempus descensus exhibente ponatur $-\sqrt{k}$ loco $\sqrt{k}$,
in arcu CNB, quod propterea quoque erit consta
arcus ascensu percursus. Q. E. D.

COROLLARIUM 1

585. Quia u aequalis est functioni unius dimensionis ipsarum f e
quabitur $\frac{u}{f}$ functioni nullius dimensionis ipsarum f et s. Quare si pon
$= nf$, aequabitur $\frac{u}{f}$ quantitati constanti, in qua non inerit f. In va
go descensibus celeritates in punctis homologis totorum arcuum erunt i
cubus f proportionales.

COROLLARIUM 2

586. Cum in descensu maxima celeritas sit, ubi est $u = \frac{gs\sqrt{k}}{a}$, inveni
nctum O seu arcus CO ex aequatione, in qua f et s ubique eundem dim
num numerum constituunt; ex qua ergo erit s seu CO ipsi f propor
is. In pluribus ergo descensibus tam maximae celeritates ipsae qu
us CO arcubus descensuum totis erunt proportionales.

COROLLARIUM 3

587. Quia tempus per MC aequale est functioni nullius dimensi
arum f et s, tempus quoque per EM aequabitur functioni nullius dim
nis ipsarum f et s seu etiam ipsius f et arcus EM.

COROLLARIUM 4

588. Hinc consequitur non solum tempora integrorum descensuum,
um tempora descensuum per partes similes arcuum totorum esse inte
qualia. Similique modo hoc locum habet in ascensibus.

COROLLARIUM 5

589. Cum igitur tam omnes descensus sint isochroni quam om
ensus, etiam omnes semioscillationes aequalibus absolventur tempori
que in casu $k > \frac{a}{8g}$, quo corpus perpetuo oscillationes continuat, om
olventur temporibus aequalibus.

COROLLARIUM 6

590. Cyclois ergo, quae est curva tautochrona in vacuo, eandem
etatem retinet in medio, quod resistit in simplici ratione celeritat

Praeterea cyclois quoque tautochronismum obtinet in
est constans seu momentis temporum, ut NEUTONUS
(§ 570).

SCHOLION 1

591. Hunc triplicem cycloidis tautochronismum
monstravit in *Princ. Phil.*[1]), atque quod ad resisten
proportionalem attinet, ex hoc demonstrationem form
descensibus, si arcuum partes totis arcubus proportio
locis celeritates sint totis arcubus quoque proportiona
totis arcubus fuerint proportionales, si elementa quoq
bus proportionalia, tempora per ea erunt inter se aequ

SCHOLION 2

592. Etsi autem ex his appareat tempora tam as
suum inter se esse aequalia, tamen determinari non pot
sive descensuum sive ascensuum, neque etiam tempora
suum inter se possunt comparari. Aequatio enim relation
ita est complicata, ut ex ea elementum temporis $\frac{ds}{u}$
non possit exprimi. Praeterea oscillationes infinite
determinandis temporibus calculum valde facilem re
stentiae hypothesi nihil adiuvant. Nam etiam si arc
natur infinite parvus, in aequatione

$$l\,\frac{\sqrt{2ac^3\sqrt{k}}}{\sqrt{(2au^2\sqrt{k}-aus+gss\sqrt{k})}}=\frac{a}{4Bk}\,At.\,\frac{\ldots}{as-\ldots}$$

quae ex superiori integrata oritur, ne unicus quidem
ceteris. Pendebit autem tempus ascensus a quantitat
modo ex his sit compositum, non liquet. Interim
quo maior sit g ceteris paribus, eo minus esse tempus
quoque crescere, k vero crescente diminui, quia resiste
igitur resistentiae hypothesi resistentia in motibus ta

1) I. NEWTON, *Philosophiae naturalis principia mathematica*,
sitiones XXV et XXVI. P. St.

nodum in resistentia quadratis celeritatum proportionali. Ex quo videtur, si resistentia in maiore quam duplicata celeritatum ratione in motibus tardissimis resistentiam negligi posse, at si resistentia minore ratione, etiam in motibus tardissimis resistentiam consi-ebere.

PROPOSITIO 67

PROBLEMA

In medio uniformi, quod resistit in ratione multiplicata celeritatum, onens est $2m$, *determinare motum corporis super curva* CMA (Fig. 66, *n qua arcus quisque* CM *proportionalis est potestati abscissae* CP, *cuius est* $1-m$.

SOLUTIO

itis abscissa $CP = x$ et arcu $CM = s$ erit

$$ds = \frac{a^m dx}{x^m}.$$

tas in M debita altitudini v; erit resistentia in $M = \frac{v^m}{k^m}$ atque ideo, descendere ponatur super arcu CM, habebitur ista aequatio

$$dv = -g dx + \frac{a^m v^m dx}{k^m x^m}.$$

nsu autem super eadem curva inservit ista aequatio

$$dv = -g dx - \frac{a^m v^m dx}{k^m x^m}.$$

vero aequatio separationem admittet, si ponatur $v = tx$; prodibit descensu

$$x dt = -t dx - g dx + \frac{a^m t^m dx}{k^m}$$

$$\frac{-k^m dt}{k^m(g+t) - a^m t^m} = \frac{dx}{x}$$

atque pro ascensu haec aequatio

$$\frac{-k^m dt}{k^m(g+t)+a^m t^m} = \frac{dx}{x}.$$

In quibus aequationibus variabiles t et x a se invi
t per x ope quadraturarum possit determinari. C
denda definiri debet vel ex data celeritate in pun
in quo vel descensus incipit vel ascensus finitur
arcui descensus vel ascensus respondens f, aequ
dimensionis ipsarum f et x tam in descensu qu
tiones differentiales homogeneas. Hanc ob rem
dimidiae dimensionis ipsarum f et x. Tempus
quod est

$$= \int \frac{ds}{\sqrt{v}} = a^m \int \frac{dx}{x^m \sqrt{v}},$$

aequale erit functioni $\frac{1}{2} - m$ dimensionum ipsaru
sito $x = f$ prodit tempus totius descensus ut $f^{\frac{1}{2}}$
est tempus totius ascensus, si quidem f abscis
designat. Si ponatur totus arcus vel descensus v
A ut f^{1-n}, erit tempus totum vel ascensus vel de
Plurium ergo descensuum tempora sunt in ration
rum arcuum descriptorum. Atque in eadem rat
ascensuum inter se; sed tempora ascensuum et
comparantur. Q. E. I.

COROLLARIUM 1

594. Quia celeritas seu $\sqrt{v}$ aequalis est fun
ipsarum f et x, in pluribus descensibus celerita
sunt in subduplicata ratione altitudinum, ex quib
altitudines, ad quas corpus ascendens pertingit,
celeritatum initialium in C.

COROLLARIUM 2

595. Cum tam tempora descensus quam ascensus sint ut $f^{\frac{1}{2}-m}$, descensus aequalibus absolventur temporibus, si fuerit $m=\frac{1}{2}$ seu res ipsis celeritatibus proportionalis. Atque hac hypothesi pariter t ascensuum inter se erunt aequalia. Curva autem erit cyclois, u ostendimus.

COROLLARIUM 3

596. Quia est $ds=\frac{a^m dx}{x^m}$, erit

$$s=\frac{a^m x^{1-m}}{1-m}.$$

Ex quo perspicitur, nisi sit $m<1$, curvam AMC fore negativam seu perinde est, imaginariam. Semper enim curva maior esse debet quam a

COROLLARIUM 4

597. Praeterea semper debet esse $ds>dx$; quare, quo hoc acc $x=0$, debet m esse numerus positivus. Hinc nostra propositio requ m inter limites 0 et 1 contineatur.

COROLLARIUM 5

598. In his casibus maximus ipsius x valor erit a ibique erit seu tangens verticalis. Hocque loco curva habebit cuspidem; altiu ascendere nequit, quia, si $x>a$, foret $ds<dx$, quod fieri nequit.

COROLLARIUM 6

599. Si m continetur intra limites 0 et 1, curva in C habebit tan horizontalem atque radius osculi in C erit

$$=\frac{sds}{dx}=\frac{a^{2m}x^{1-2m}}{1-m}$$

posito $x=0$. Quare radius osculi in C erit infinite parvus, si $m<\frac{1}{2}$, si $m=\frac{1}{2}$, et infinite magnus, si $m>\frac{1}{2}$.

600. Tempora minimorum descensuum et ascensu
si $m < \frac{1}{2}$, at finita, si $m = \frac{1}{2}$. Infinite magna denique
nent ergo radiorum osculi in intimo puncto C rationen

SCHOLION

601. Habemus hic ergo exempla curvarum pro res
duplicatam rationem celeritatum tenente, super quibus
determinari. At si medium in maiore quam duplicata
nusquam habebit tangentem horizontalem atque ideo
nunquam finiri possunt. Quo autem in exemplo appa
corporis in medio, quod in maiore quam duplicata ratio
investigare lubet motum corporis super cycloide salte
sistit in quadruplicata ratione celeritatum. Hanc vero
prae aliis eligo, quia in ea celeritas commode per seri

PROPOSITIO 68

PROBLEMA

602. *In medio uniformi, quod resistit in quadrupli*
determinare tam descensum quam ascensum corporis qu
ACB (Fig. 66, p. 255).

SOLUTIO

Posita potentia uniformi corpus perpetuo deorsum
$CP = x$ et arcu $CM = s$ erit ex natura cycloidis $dx =$
C debita altitudini b et in M altitudini v atquo expon
resistentia in $M = \frac{v^2}{k^2}$. Pro descensu ergo habebitur

$$dv = -g\,dx + \frac{v^2 ds}{k^2} = -\frac{g s\,ds}{a} + \frac{v^2 d s}{k^2}$$

at pro ascensu ista

$$dv = -\frac{g s\,ds}{a} - \frac{v^2 ds}{k^2}.$$

Pro descensu ponatur

$$v=\frac{-k^2dz}{zds};$$

erit

$$dv=\frac{-k^2ddz}{zds}+\frac{k^2dz^2}{z^2ds}$$

posito ds constante. Quamobrem habebitur

$$k^2ddz=\frac{gszds^2}{a};$$

quae aequatio in seriem conversa dat

$$z=f+hs+\frac{fgs^3}{2\cdot 3ak^2}+\frac{hgs^4}{3\cdot 4ak^2}+\frac{fg^2s^6}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6a^2k^4}+\frac{hg^2s^7}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7a^2k^4}$$
$$+\frac{fg^3s^9}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6\cdot 8\cdot 9a^3k^6}+\text{etc.}$$

Ad constantes f et h determinandas quaeratur valor ipsius v posito $s=0$; erit ergo

$$b=-\frac{k^2h}{f}.$$

Et quia, si $s=0$, est

$$dv=\frac{v^2ds}{k^2}=\frac{b^2ds}{k^2},$$

propter $dv=\frac{-k^2ddz}{zds}+\frac{k^2dz^2}{z^2ds}$ erit

$$\frac{b^2}{k^2}=\frac{k^2h^2}{ff},$$

quae aequatio cum illa congruit; erit ergo $h=-\frac{bf}{k^2}$. Hoc substituto erit

$$v=\frac{b-\frac{gs^2}{2a}+\frac{bgs^3}{3ak^2}-\frac{g^2s^5}{2\cdot 3\cdot 5a^2k^2}+\frac{bg^2s^6}{3\cdot 4\cdot 6a^2k^4}-\text{etc.}}{1-\frac{bs}{k^2}+\frac{gs^3}{2\cdot 3ak^2}-\frac{bgs^4}{3\cdot 4ak^4}+\frac{g^2s^6}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6a^2k^4}-\text{etc.}}.$$

Pro ascensu vero posito $-s$ loco s habebitur

$$v=\frac{b-\frac{gs^2}{2a}-\frac{bgs^3}{3ak^2}+\frac{g^2s^5}{2\cdot 3\cdot 5a^2k^2}+\frac{bg^2s^6}{3\cdot 4\cdot 6a^2k^4}-\text{etc.}}{1+\frac{bs}{k^2}-\frac{gs^3}{2\cdot 3ak^2}-\frac{bgs^4}{3\cdot 4ak^4}+\frac{g^2s^6}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6a^2k^4}+\text{etc.}}.$$

Ex his aequationibus totus arcus vel descensus vel ascensus invenitur

ponatur $v=0$ atque valor ipsius s investigetur. Ut
valde magna, erit arcus descensus, qui sit E,

$$=\frac{\sqrt{2ab}}{\sqrt{g}}+\frac{8ab^2}{15gk^2}+\frac{301a^2b^4\sqrt{g}}{450g^2k^4\sqrt{2ab}}+\text{etc}$$

At sequens arcus ascensus, qui sit F, erit

$$=\frac{\sqrt{2ab}}{\sqrt{g}}-\frac{8ab^2}{15gk^2}+\frac{301a^2b^4\sqrt{g}}{450g^2k^4\sqrt{2ab}}-\text{etc}$$

Q. E. I.

COROLLARIUM 1

603. Si ergo resistentia est quam minima, erit sum
et ascensus seu arcus una semioscillatione descriptus, i.

$$E+F=\frac{2\sqrt{2ab}}{\sqrt{g}} \text{ quam proxime.}$$

COROLLARIUM 2

604. Differentia autem inter arcus ascensus et desc

$$E-F=\frac{16ab^2}{15gk^2}=\frac{g(E+F)^4}{60ak^2}.$$

Quare differentia inter arcus descensus et ascensus
summae arcuum.

---

1) Editio princeps:

$$=\frac{\sqrt{2ab}}{\sqrt{g}}+\frac{8ab^2}{15gk^2}+\frac{17a^2b^4\sqrt{g}}{25g^2k^4\sqrt{2ab}}+\text{etc.}$$

Evolvendo arcum s secundum potestates quantitatis $\frac{1}{k^2}$ EULERUS in ser

$$b=\frac{gs^2}{2a}-\frac{bgs^3}{3ak^2}+\frac{g^2s^6}{2\cdot 3\cdot 5a^3k^2}-\frac{bg^2s^6}{3\cdot 4\cdot 6a^2k^4}+\frac{g^3s^8}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6}$$

terminum

$$\frac{g^3s^8}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6\cdot 8a^3k^4}$$

neglexit hocque modo valorem coefficientis membri tertii vero fractione

2) Editio princeps: $=\frac{\sqrt{2ab}}{\sqrt{g}}-\frac{8ab^2}{15gk^2}+\frac{17a^2b^4\sqrt{g}}{25g^2k^4\sqrt{2ab}}-\text{etc.}$

SCHOLION 1

. Ex his perspicitur in medio rarissimo, quod resistit in quadruplicata celeritatum, differentiam inter arcus ascensus et descensus proportiosse biquadrato summae arcuum seu

$$E - F = \frac{g(E+F)^4}{60ak^3}.$$

utem vidimus in medio rarissimo, quod in duplicata ratione celeriesistit, esse arcum descensus

$$E = \frac{\sqrt{2ab}}{\sqrt{g}} + \frac{2ab}{3gk}$$

n ascensus

$$F = \frac{\sqrt{2ab}}{\sqrt{g}} - \frac{2ab}{3gk};$$

$$E + F = \frac{2\sqrt{2ab}}{\sqrt{g}} \quad \text{et} \quad E - F = \frac{4ab}{3gk} = \frac{(E+F)^2}{6k}$$

Quare in hac resistentia est differentia inter arcus ascensus et deut quadratum summae arcuum. Atque in medio, quod in simplici celeritatum resistit, si fuerit rarissimum, est

$$E = \frac{\sqrt{2ab}}{\sqrt{g}} + \frac{\pi a\sqrt{b}}{4g\sqrt{k}} \quad \text{et} \quad F = \frac{\sqrt{2ab}}{\sqrt{g}} - \frac{\pi a\sqrt{b}}{4g\sqrt{k}}$$

Quare erit

$$E - F = \frac{\pi a\sqrt{b}}{2g\sqrt{k}} = \frac{\pi(E+F)\sqrt{a}}{4\sqrt{2kg}}.$$

erentia inter arcus descensus et ascensus est ipsi summae arcuum nalis. Ex quo consequi videtur in medio quocunque rarissimo, quod in $2m$-multiplicata ratione celeritatum, differentiam inter arcus et descensus super cycloide proportionalem esse potestati summae ascensus et descensus, cuius exponens sit $2m$. Atque in hac resihypothesi coniectare licet fore arcum descensus

$$E = \frac{\sqrt{2ab}}{\sqrt{g}} + \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2mab^m}{3\cdot 5\cdot 7\cdots(2m+1)gk^m}$$

ascensus

$$F = \frac{\sqrt{2ab}}{\sqrt{g}} - \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2mab^m}{3\cdot 5\cdot 7\cdots(2m+1)gk^m}.$$

Unde fit

$$E - F = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots m g^{m-1}(E+F)^{2}}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2m+1)\, 2^{2m-1} a^{m}}$$

Quoties ergo m est numerus integer seu $2m$ numer
aequatio inter $E-F$ et $E+F$; at si m fuerit
fractionis $\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots m}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2m+1)}$ per methodum interpolati
Comment. Acad. Petrop. A. 1730[1]), investigari p
constat, si $2m$ fuerit numerus impar, valorem lu
quadraturam circuli, quemadmodum etiam in casu,

SCHOLION 2

606. Quod quidem ad ipsam propositionem attin
arcus descensus et ascensus super cycloide in tot
arcuum, in quotuplicata ratione celeritatum sit resi
minima, NEUTONUS in *Princ.* demonstravit[2]). Atque
ex ipsa aequatione

$$dv = -\frac{gsds}{a} + \frac{v^{m}ds}{k^{m}}$$

derivare licet. Ponatur enim

$$v = b - \frac{gs^{2}}{2a} + Q,$$

ubi Q erit quantitas valde parva prae b et $\frac{gs^{2}}{2a}$. Ha

$$-\frac{gsds}{a} + dQ = \frac{-gsds}{a} + \frac{\left(b - \frac{gs^{2}}{2a}\right.}{k^{m}}$$

pro descensu seu

$$Q = \int \frac{(2ab - gs^{2})^{m} ds}{(2ak)^{m}}$$

---

1) L. EULERI Commentatio 19 (indicis ENESTROEMIANI): *De pro
quarum termini generales algebraice dari nequeunt*, Comment.
1738, p. 36; *LEONHARDI EULERI Opera omnia*, series I, vol. 14.

2) I. NEWTON, *Philosophiae naturalis principia mathematic*
XXXI. P. St.

egrali ita accepto, ut evanescat posito $s = 0$. Pro descensu ergo erit

$$v = b - \frac{gs^2}{2a} + \int \frac{(2ab - gs^2)^m ds}{(2ak)^m}$$

scensu

$$v = b - \frac{gs^2}{2a} - \int \frac{(2ab - gs^2)^m ds}{(2ak)^m}.$$

$v = 0$,[1] et quia tunc proxime est $s = \frac{\sqrt{2ab}}{\sqrt{g}}$, ponatur

$$s = \frac{\sqrt{2ab}}{\sqrt{g}} + q;$$

$$0 = \frac{-gq\sqrt{2ab}}{a\sqrt{g}} + \int \frac{(2ab - gss)^m ds}{(2ak)^m}$$

$$q = \sqrt{\frac{a}{2gb}} \int \frac{(2ab - gss)^m ds}{(2ak)^m},$$

em post integrationem ponatur $s = \sqrt{\frac{2ab}{g}}$. At quia in hoc ipsius q ipsarum $\sqrt{b}$ et s sunt $2m$ dimensiones, habebit q huiusmodi formam Quocirca erit arcus descensus

$$E = \frac{\sqrt{2ab}}{\sqrt{g}} + Nb^m$$

s ascensus

$$F = \frac{\sqrt{2ab}}{\sqrt{g}} - Nb^m.$$

rgo habebitur

$$E - F = 2Nb^m = \frac{Ng^m(E+F)^{2m}}{2^{3m-1}a^m}.$$

nerus N obtinebitur ex formula

$$\sqrt{\frac{a}{2gb}} \int \left(\frac{2ab - gss}{2abk}\right)^m ds,$$

integrationem ponatur $s = \frac{\sqrt{2ab}}{\sqrt{g}}$. Atque haec est demonstratio illius quod in praecedente scholio ex inductione derivabamus. Erit enim nerus rationalis, quoties m fuerit numerus integer affirmativus; at si

$2m$ fuerit numerus integer impar, inventio numeri N a
pendebit. Generaliter autem valor ipsius q cum hac exp

$$\frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2mab^m}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2m+1)gk^m}$$

congruit.

PROPOSITIO 69

PROBLEMA

607. *In medio, quod resistit in quadruplicata ratione corporis super curva AMC* (Fig. 67) *ex dato puncto A de locis celeritas, invenire celeritatem eiusdem corporis descensu puncto E incipientis.*

SOLUTIO

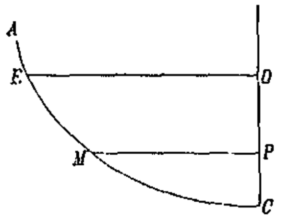


Fig. 67.

Posito $CP = x$ et $CM =$
delapsi celeritas in M debita
quantitas u ergo per hypothe
Iam si corpus descensum ex
incipiat, sit celeritas in M
Aequatio vero motum determ

$$dv = -g\,dx + \frac{v^2\,ds}{k^2},$$

quae dat valorem ipsius v, ubicunque descensus inceperit

$$du = -g\,dx + \frac{u^2\,ds}{k^2}.$$

Ponatur $v = u - q$; erit

$$du - dq = -g\,dx + \frac{u^2\,ds}{k^2} - \frac{2qu\,ds}{k^2} + \frac{q^2\,d}{k^2}$$

ex qua aequatione propter

$$du = -g\,dx + \frac{u^2\,ds}{k^2}$$

oritur

$$-dq = -\frac{2qu\,ds}{k^2} + \frac{q^2\,ds}{k^2} \quad \text{seu} \quad -\frac{dq}{q^2} + \frac{2u\,ds}{k^2 q}$$

…ultiplicata per $e^{\frac{2\int u\,ds}{k^2}}$ dat hanc integralem

$$e^{\frac{2\int u\,ds}{k^2}} = cq + q\int \frac{e^{\frac{2\int u\,ds}{k^2}}\,ds}{k^2},$$

… prodit [mutata significatione litterae c]

$$q = \frac{k^2 e^{\frac{2\int u\,ds}{k^2}}}{c + \int e^{\frac{2\int u\,ds}{k^2}}\,ds}.$$

…a erit

$$v = u - \frac{k^2 e^{\frac{2\int u\,ds}{k^2}}}{c + \int e^{\frac{2\int u\,ds}{k^2}}\,ds},$$

… aequatione integralia

$$\int \frac{u\,ds}{k^2} \quad \text{et} \quad \int e^{\frac{2\int u\,ds}{k^2}}\,ds$$

… accepta, ut evanescant posito $s = 0$. Sit nunc altitudo celeritati in …ta $= a$, si descensus ex A fiat, at altitudo celeritati in C debita, s…us ex E fit, $= b$; erit $b = a - \frac{k^2}{c}$. Ex quo habebitur

$$v = u - \frac{(a-b)k^2 e^{\frac{2\int u\,ds}{k^2}}}{k^2 + (a-b)\int e^{\frac{2\int u\,ds}{k^2}}\,ds}.$$

…rgo celeritate in C, nempe $\sqrt{b}$, invenietur punctum E, in quo descensus … ex hac aequatione

$$u = \frac{(a-b)k^2 e^{\frac{2\int u\,ds}{k^2}}}{k^2 + (a-b)\int e^{\frac{2\int u\,ds}{k^2}}\,ds},$$

… valor ipsius s dabit arcum CME. Quia igitur datur u per s, ex …quatione celeritas corporis ex quocunque alio puncto delapsi super …AMC invenietur. Q. E. I.

COROLLARIUM 1

608. Si valor ipsius v ita immutetur, ut tam in
denominatore b sine coefficiente appareat, prodibit

$$v = \frac{\left(u\int e^{\frac{2\int uds}{k^2}}ds - k^2 e^{\frac{2\int uds}{k^2}}\right)}{\int e^{\frac{2\int uds}{k^2}}ds} \cdot \frac{\left(b - a + \frac{k^2 \ldots}{k^2 e^{\frac{2\int uds}{k^2}} - \ldots}\right.}{\left(b - a - \frac{k^2 \ldots}{\int e^{\frac{2\int uds}{k^2}} \ldots}\right.}$$

Atque erit $v = 0$, si est

$$a + \frac{k^2 u}{u\int e^{\frac{2\int uds}{k^2}}ds - k^2 e^{\frac{2\int uds}{k^2}}} = b.$$

COROLLARIUM 2

609. Quia est

$$du - \frac{u^2 ds}{k^2} = -gdx,$$

erit huius aequationis per $e^{\frac{-\int uds}{k^2}}$ multiplicatae integral

$$u = ae^{\frac{\int uds}{k^2}} - ge^{\frac{\int uds}{k^2}}\int e^{\frac{-\int uds}{k^2}}dx$$

integralibus ita sumtis, ut evanescant posito s vel $x =$

$$\frac{du}{u} + \frac{gdx}{u} = \frac{uds}{k^2}$$

atque hinc

$$\int\frac{uds}{k^2} = l\frac{u}{a} + \int\frac{gdx}{u}.$$

Quare erit

$$e^{\frac{\int uds}{k^2}} = \frac{e^{\int\frac{gdx}{u}}u}{a};$$

unde dx loco ds in aequatione superiore potest intro

COROLLARIUM 3

). Si resistentia fuerit quam minima, evanescet $\int e^{\frac{2\int u\,ds}{k^2}} ds$ prae k^2 et
t

$$v = u - (a - b)e^{\frac{2\int u\,ds}{k^2}} = u - (a - b)\left(1 + \frac{2\int u\,ds}{k^2}\right)$$

k quantitatem maximam. Quamobrem erit

$$b + \frac{2b\int u\,ds}{k^2} - a - \frac{2a\int u\,ds}{k^2} + u = \left(1 + \frac{2\int u\,ds}{k^2}\right)\left(b - a + \frac{u}{1 + \frac{2\int u\,ds}{k^2}}\right).$$

COROLLARIUM 4

. Cum autem sit

$$\sqrt{\left(1 + \frac{2\int u\,ds}{k^2}\right)} = 1 + \frac{\int u\,ds}{k^2},$$

nentum temporis

$$\frac{ds}{\sqrt{v}} = \frac{k^2\,ds}{(k^2 + \int u\,ds)\sqrt{\left(b - a + \frac{k^2 u}{k^2 + 2\int u\,ds}\right)}}.$$

nationem autem

$$du = -g\,dx + \frac{u^2\,ds}{k^2}$$

n proxime

$$u = a - gx + \int \frac{(a - gx)^2\,ds}{k^2},$$

it

$$\int u\,ds = \int (a - gx)\,ds$$

$$\frac{ds}{\sqrt{v}} = \frac{k^2\,ds}{(k^2 + \int(a - gx)\,ds)\sqrt{\left(b - a + \frac{k^2 a - gk^2 x + \int(a - gx)^2\,ds}{k^2 + 2\int(a - gx)\,ds}\right)}}$$

$$= \frac{k^2\,ds}{(k^2 + \int(a - gx)\,ds)\sqrt{\left(b - \frac{gk^2 x - \int(a^2 - g^2x^2)\,ds}{k^2 + 2\int(a - gx)\,ds}\right)}}.$$

SCHOLION

. Quemadmodum hypothesis resistentiae quadratis celeritatum pro-
lis prae aliis hypothesibus excepta ea, quae est constans, hanc habet

praerogativam, ut corporis super quacunque curva m
locis ex aequatione curvae possit definiri, ita haec r
hoc prae reliquis excellit, quod ex dato unico desc
omnes descensus et ascensus possint determinari. I
operatio, qua hic usi sumus, non succedit neque ad
qua indeterminatae a se invicem separari possunt.
stentia constans est simplicissima eamque sequitur ea
tatum est proportionalis, ita post has pro simplicissi
est habenda ea, quae fit in quadruplicata ratione cele
ex his parum commodi ad motum in hac resistentia
obtineri, quia unus descensus tanquam datus accipi
aeque est difficilis ac quisque alius. At si plures
et inter se comparantur, aequatio

$$dv = -gdx + \frac{v^2 ds}{k^2}$$

reipsa tres variabiles implicat, nempe praeter v et
puncto C, quae in variis descensibus variatur. Quare
aequationis ad hanc aequationem

$$du = -gdx + \frac{u^2 ds}{k^2}$$

reduxerimus, quae ad unicum descensum spectat, il
variabilium hoc modo tollitur. Praeterea ope istius
inter se comparari possunt, quod in aliis resistentiae
fieri potest. Atque hinc etiam multa problemata inv
hypothesi resolvi possunt, quae in aliis omnino tract

PROPOSITIO 70

PROBLEMA

613. *Si resistentia fuerit quam minima respectu pot
et proportionalis potestati cuicunque celeritatum, determin
quacunque curva AM* (Fig. 68, p. 303).

SOLUTIO

Descendat corpus super curva AM descensus in
natur super axe verticali abscissa $AP = x$, arcus A

eorsum trahens $= g$. Sit celeritas in M debita altitudini v et resi-
bidem $= \frac{v^m}{k^m}$, ita ut resistentia sit proportionalis potestati exponentis
itatum. His positis erit

$$dv = g\,dx - \frac{v^m ds}{k^m};$$

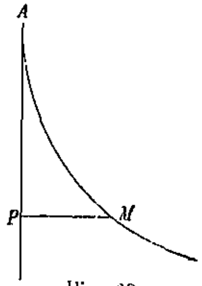


Fig. 68.

resistentia ponitur valde parva, erit terminus $\frac{v^m ds}{k^m}$
ter exiguus atque propterea $v = gx$ quam
Substituatur gx loco v in termino $\frac{v^m ds}{k^m}$; erit

$$v = gx - \frac{g^m}{k^m}\int x^m ds$$

nili modo adhuc propius

$$v = gx - \frac{g^m}{k^m}\int x^m ds + \frac{m g^{2m-1}}{k^{2m}}\int x^{m-1} ds \int x^m ds.$$

egralia ita sunt accipienda, ut evanescant posito $x = 0$. Hinc ergo erit

$$= \frac{1}{\sqrt{gx}} + \frac{g^m \int x^m ds}{2k^m gx\sqrt{gx}} - \frac{m g^{2m} \int x^{m-1} ds \int x^m ds}{2k^{2m} g^2 x\sqrt{gx}} + \frac{3g^{2m}(\int x^m ds)^2}{8k^{2m} g^2 x^2 \sqrt{gx}} + \text{etc.}$$

mpus descensus per AM erit

$$= \int \frac{ds}{\sqrt{gx}} + \frac{g^{m-\frac{3}{2}}}{2k^m}\int x^{-\frac{3}{2}} ds \int x^m ds \text{ quam proxime.}$$

escensus ad fixum punctum C (Fig. 67, p. 298) usque desideretur
scensus ex puncto E facto, ponatur puncti E supra C altitudo
$CD = a$, abscissa $CP = x$ et arcus $CM = s$; quibus positis hic
superiorem reducetur, si ibi loco x ponatur $a - x$ et $-ds$ loco ds.
altitudo celeritati in M debita vocetur v, erit

$$x) + \frac{g^m}{k^m}\int (a-x)^m ds + \frac{m g^{2m-1}}{k^{2m}}\int (a-x)^{m-1} ds \int (a-x)^m ds \text{ quam proxime.}$$

integralia ita sunt accipienda, ut evanescant posito $x = a$. Atque
er arcum EM est

$$= -\int \frac{ds}{\sqrt{g(a-x)}} + \frac{g^{m-\frac{3}{2}}}{2k^m}\int (a-x)^{-\frac{3}{2}} ds \int (a-x)^m ds \text{ quam proxime,}$$

Simili modo, si corpus ex C super curva CME a
qua ad punctum E usque pertingere possit, earu
habebunt, si modo loco k^m ponatur $-k^m$. Hanc ob

$$v = g(a-x) - \frac{g^m}{k^m}\int (a-x)^m ds + \frac{mg^{2m-1}}{k^{2m}}\int (a-x)^{m-1} ds \int$$

atque tempus ascensus per ME

$$= -\int \frac{ds}{\sqrt{g(a-x)}} - \frac{g^{m-\frac{3}{2}}}{2k^m}\int (a-x)^{-\frac{3}{2}} ds \int (a-x)^m$$

omnibus his integralibus quoque ita acceptis, ut
Atque hoc modo tam descensus corporis super
oscillationes super curva idonea in medio rarissin
Q. E. I.

COROLLARIUM 1

614. Apparet ex his, quod quidem per se intell
resistente super curva AM (Fig. 68, p. 303) descenda
minorem, quam si corpus in vacuo super eadem c
tempus in medio resistente maius est quam temp
vacuo.

COROLLARIUM 2

615. Altitudo celeritati in puncto infimo C (
dibit, si in expressione ipsius v ponatur $x = 0$. H

$$v = ga + \frac{g^m}{k^m}\int (a-x)^m ds \text{ quam p}$$

posito post integrationem supra praescripto mod
$\int (a-x)^m ds$ ita capiatur, ut evanescat posito $x =$

$$v = ga - \frac{g^m}{k^m}\int (a-x)^m ds,$$

si post integrationem ponatur $x = a$. Id quod ad

COROLLARIUM 3

At pro ascensu celeritas corporis in C, qua ad E usque ascendere
ita erit altitudini

$$= ga + \frac{g^m}{k^m}\int(a-x)^m ds,$$

egrale ita accipiatur, ut evanescat posito $x=0$, atque post inte-
ponatur $x=a$.

COROLLARIUM 4

Sit altitudo debita celeritati corporis in $C = b$, quam iam descen-
EMC acquisivit et qua iterum super eadem curva ascendet; ponatur
DC descensu percursa ut ante a et altitudo, ad quam ascensu per-
$-d$; erit d quantitas valde parva atque ideo

$$b = ga - \frac{g^m}{k^m}\int(a-x)^m ds = ga - gd + \frac{g^m}{k^m}\int(a-x)^m ds$$

$$d = \frac{2g^{m-1}}{k^m}\int(a-x)^m ds$$

$$d = \frac{2ga-2b}{g}.$$

COROLLARIUM 5

Quia tempus descensus per EM est

$$= -\int\frac{ds}{\sqrt{g(a-x)}} + \frac{g^{m-\frac{3}{2}}}{2k^m}\int(a-x)^{-\frac{3}{2}}ds\int(a-x)^m ds$$

alibus ita acceptis, ut evanescant posito $x=a$, erit tempus per MC

$$= \int\frac{ds}{\sqrt{g(a-x)}} - \frac{g^{m-\frac{3}{2}}}{2k^m}\int(a-x)^{-\frac{3}{2}}ds\int(a-x)^m ds,$$

lia ita accipiantur, ut evanescant posito $x=0$. Atque simili modo
a erit tempus per CM

$$= \int\frac{ds}{\sqrt{g(a-x)}} + \frac{g^{m-\frac{3}{2}}}{2k^m}\int(a-x)^{-\frac{3}{2}}ds\int(a-x)^m ds.$$

COROLLARIUM 6

619. Integrum ergo tempus vel descensus vel ascen
bitur, si in his posterioribus formulis ponatur post inte

SCHOLION

620. Satis iam expositis iis, quae ad motum corpo
inveniendum pertinent, progredior ad quaestiones invers
datis, quae incognita sunt, investigantur. Et primum
huiusmodi problemata, in quibus lex accelerationis s
datur et curva quaeritur, quae motum illi scalae conv
medio quocunque resistente; potentiam vero absoluta
stantem et deorsum directam assumemus.

PROPOSITIO 71

PROBLEMA

621. *In medio, quod resistit in ratione quacunque m
invenire curvam AM* (Fig. 69), *super qua corpus ita des
punctis M celeritatem habeat debitam altitudini, quae aequali
denti PL datae curvae BL.*

SOLUTIO

Posita $AP = x$ et $PL = v$ dabitur aequatio inter x
BL datam. Iam sit arcus $AM = s$ et exponens ration
ritatum $2m$, cui resistentia est proportionalis; quibus po

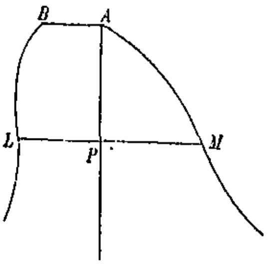


Fig. 69.

$$dv = gdx - \frac{v^m ds}{k^m}$$

denotante g potentiam unifo
hentem et k exponentem r
igitur aequatione est

$$ds = \frac{gk^m dx - k^m dv}{v^m},$$

v per x dari ponitur, variabiles habet a se invicem separatas
rco sufficit ad curvam quaesitam AM construendam. At quia ds
nius esse debet quam dx, ne curva AM fiat imaginaria, oportet,
$dx - k^m dv > v^m dx$ seu

$$dx > \frac{k^m dv}{gk^m - v^m}.$$

bi est

$$dx = \frac{k^m dv}{gk^m - v^m},$$

AM tangens fit verticalis; et ubi

$$dx < \frac{k^m dv}{gk^m - v^m},$$

AM omnino partem habere nequit. Q. E. I.

COROLLARIUM 1

Cum, ubi curvae BL tangens est verticalis, sit $dv = 0$, erit in
ndente curvae AM

$$ds = \frac{gk^m dx}{v^m},$$

ncto corpus descendens maximam vel minimam habebit celeritatem.
hoc curvae AM punctum sit imaginarium, oportet sit $gk^m > v^m$
$/g$.

COROLLARIUM 2

Si curva BL alicubi incidat in axem AP, ut ibi sit $v = 0$, erit
rvae AM respondente $ds = \infty$, si quidem m fuerit numerus affir-
Hoc ergo loco curva AM habebit tangentem horizontalem, in
a desinet.

COROLLARIUM 3

Habeat curva AM alicubi tangentem horizontalem; evanescet illo
rae ds. Quamobrem erit

$$ds = \frac{-k^m dv}{v^m}.$$

Ex quo apparet in loco curvae BL respondente applicat
atque ibi curvae BL tangentem fore horizontalem, quia
maius erit quam dx.

COROLLARIUM 4

625. Curvae AM tangens, ut vidimus, est verticalis

$$dx = \frac{k^m dv}{gk^m - v^m}.$$

Quo igitur curva in initio A, ubi celeritas sit nulla, hab
calem, oportet, ut ibi sit $dv = gdx$ seu $v = gx$. Ho
anguli, quem curva BL in A cum AP constituet, erit =

COROLLARIUM 5

626. Cum sit

$$ds = \frac{gk^m dx - k^m dv}{v^m},$$

erit elementum temporis

$$\frac{ds}{\sqrt{v}} = \frac{gk^m dx - k^m dv}{v^{m+\frac{1}{2}}}.$$

Quocirca tempus descensus per AM erit

$$= \frac{2k^m}{(2m-1)v^{m-\frac{1}{2}}} + gk^m \int \frac{dx}{v^{m+\frac{1}{2}}}.$$

SCHOLION 1

627. Si curva BL super AB ascenderet, tum curv
vergeret atque loco descensus problemati satisfaceret
curva. Fit enim hoc casu abscissa x negativa ideoque o
quamobrem habebitur ista aequatio

$$ds = \frac{-gk^m dx - k^m dv}{v^m},$$

quae oritur ex aequatione

$$dv = -gdx - \frac{v^m ds}{k^m}$$

aturam ascensus continente. Simili modo, si curva BL ita est compara rursus ascendat, tum curva AM quoque sursum dirigetur et part escensu partim ascensu conditioni praescriptae satisfaciet.

EXEMPLUM 1

628. Si quaeratur curva AM, super qua corpus aequabiliter moveat leritate scilicet altitudini b debita, erit BL linea recta parallela axi que $v = b$. Hanc ob rem erit

$$ds = \frac{gk^m dx}{b^m}.$$

nde sequitur lineam AM fore rectam inclinatam et cosinum anguli, qu un verticali AP constituet, fore $= \frac{b^m}{gk^m}$ posito 1 pro sinu toto. Quo igit aior fuerit b seu celeritas, qua corpus ferri debet, eo minor erit angul am verticali AP, atque si fuerit $b^m = gk^m$, tum linea quaesita ipsa e erticalis AP. At si b^m maior proponeretur quam gk^m, tum solutio perd eret ad imaginarium, ad angulum scilicet, cuius cosinus esset maior si to. Tempus porro, quo lineae portio AM descensu absolvitur, erit

$$= \frac{gk^m x}{b^m \sqrt{b}} = \frac{s}{\sqrt{b}}.$$

EXEMPLUM 2

629. Quaeratur curva AM, super qua corpus ita descendat, ut e leritas in singulis punctis sit ut radix quadrata ex altitudine AP, quae roprietas omni motui in vacuo competens. Erit igitur $v = \alpha x$ et $dv = \alpha$ sque substitutis habebitur

$$ds = \frac{gk^m dx - \alpha k^m dx}{\alpha^m x^m} \quad \text{et} \quad s = \frac{(g-\alpha) k^m x^{1-m}}{(1-m)\alpha^m},$$

i constantis additione non est opus, si $m < 1$. At si $m = 1$, curva ractoria super linea horizontali per A transeunte descripta; super qua corp infinita distantia, concursu scilicet tractoriae cum asymtoto, descensu ncipit. Simili modo, si $m > 1$, curva formam habebit tractoriae simile emper autem esse debet $\alpha < g$; ex quo perspicitur corpus in medio re ente non tantam acquirere posse celeritatem quantam in vacuo. Dein

quia ds maius esse debet quam dx, erit $(g-\alpha)k^m > \alpha^m x^
fundius descendere nequit quam per altitudinem

$$=\frac{k}{\alpha}\sqrt[m]{(g-\alpha)};$$

quo loco curvae tangens erit verticalis curvaque punctum
Tempus autem, quo corpus per arcum AM descendit, e

$$=\int\frac{ds}{\sqrt{\alpha x}}=\frac{2(g-\alpha)k^m x^{\frac{1}{2}-m}}{(1-2m)\alpha^{m+\frac{1}{2}}}.$$

Quare nisi sit $m<\frac{1}{2}$, tempus non potest esse finit
magnum; nam si $m=\frac{1}{2}$, curva erit cyclois deorsum
vertice A corpus perpetuo permanebit.

COROLLARIUM 6

630. Perspicitur ergo in medio resistente motum non
posse continuari, ita ut celeritates semper sint in
altitudinum.

COROLLARIUM 7

631. Ex his apparet omnes curvas hoc modo i
tangentem horizontalem. Quamdiu ergo radius osculi i
tudinis, corpus nunquam descendet. At si radius osc
quod evenit, si $m<\frac{1}{2}$, tum corpus descendere poterit;
tempus fit finitum, intelligitur.

SCHOLION 2

632. Si corpus ex A descensum incipiat atque cur
non fuerit horizontalis, tum ipso motus initio resistent
ibi $dv=gdx$. Quamobrem quo loco AM curva prod
tangentem horizontalem, curva BL, quae in A conveni
esse comparata, ut in ipso initio sit $v=gx$; seu tan
cum axe AP angulum constituere debet, cuius tang
enim curva AM non angulum acutum cum AP co

escendendo semper esse debet $v < gx$; in medio enim resistente celeritas uacunque altitudine acquisita minor est celeritate, quae in vacuo ex ead ltitudine acquiritur. Porro in medio resistente corpus maiorem celeritat cquirere non potest, quam si per lineam verticalem delaberetur; quia cr nea verticalis est brevissima et citissime descensu absolvitur, corpus qu ninime resistentiae actioni est expositum. Quamobrem in medio resiste urva BL ita debet esse comparata, ut v ubique sit minor quam altitu ebita celeritati, quae a corpore in eodem medio resistente per AP cader cquiritur. Ubi enim v hanc altitudinem superat, ibi curva AM fit imagina

SCHOLION 3

633. Simili modo res se habet, si pro ascensu detur curva B 'ig. 70), cuius applicatae PL sint altitudines debitae celeritatibus corpo scendentis super curva invenienda AME in punctis M. Dictis enim $AP=$ $^{\prime}L = v$ et $AM = s$ erit

$$ds = \frac{-gk^m dx - k^m dv}{v^m}.$$

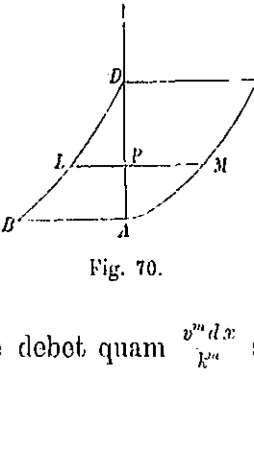


Fig. 70.

Ie igitur ds sit negativum, oportet, ut dv habeat alorem negativum, i. e. ut curva BL continuo ad xem AD convergat. Deinde etiam $-dv$ maius sse debet quam gdx seu tangens curvae BL bique cum axe AP maiorem angulum constituere ebet, quam est is, cuius tangens est $= g$. Neque ero hoc sufficit, sed praeterea $-dv - gdx$ maius esse debet quam $\frac{v^m dx}{k^m}$ s

$$-dv > \frac{(gk^m + v^m)dx}{k^m},$$

ive differentia inter $-dv$ et gdx maior esse debet quam $\frac{v^m dx}{k^m}$. H ostrema conditio huc redit, ut PL sit minor quam altitudo debita celerit uam corpus in P haberet, si ex A celeritate altitudini AB debita per scendisset. In ascensu enim per lineam verticalem corpus pro ratione a udinis percursae minimum celeritatis detrimentum a resistentia patitur. pso autem puncto D angulus ADB tantus esse debet, ut eius tangens $= g$, quia prope punctum E, in quo celeritas est nulla, resistentiae effec vanescit; sin vero iste angulus esset maior, curva AME in E tangent aberet horizontalem, uti in praecedente scholio quoque de descensu monuim

PROPOSITIO 72

PROBLEMA

634. *Si detur curva* AM (Fig. 71), *super qua corp*
venire curvam am, *super qua corpus in medio resistente*
in a *aequalis sit celeritati in* A *et sumtis arcubus* A
celeritates in singulis punctis M *et* m *sint quoque aequa*

SOLUTIO

Ductis axibus verticalibus AP et ap et hori
$AM = am = s$, $AP = t$ et $ap = x$; propter curva

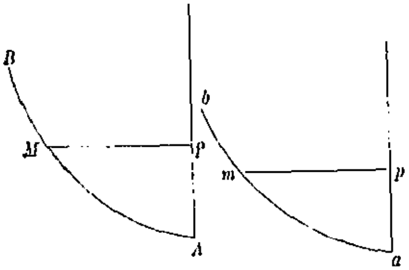


Fig 71.

aequatio inter s
tates in punctis
b et celeritates
tudini v. Sit p
sollicitans g et
exponentis $2m$
erit pro motu in

$$dv = -gd$$

et pro descensu in medio resistente super curva ma

$$dv = -gdx + \frac{v^m ds}{k^m};$$

in qua aequatione si loco dv et v substituantur val
inventi, prodibit

$$-gdt = -gdx + \frac{(b-gt)^m ds}{k^m} \quad \text{seu} \quad dx = d$$

Quia autem datur aequatio inter t et s, si loco t c
tur, habebitur aequatio inter x et s pro curva quae

COROLLARIUM 1

635. Si in curva AM punctum B fuerit initiu
altitudo supra $A = \frac{b}{g}$, habebitur quoque in curva
sumendo arcum $amb = AMB$.

COROLLARIUM 2

636. Ex solutione apparet esse semper $dx > dt$; quare altitudo ap m
erit quam altitudo AP; in medio enim resistente maiore opus est altitu
ad eandem celeritatem generandam quam in vacuo.

COROLLARIUM 3

637. Quia in curvis AM et am sumtis aequalibus arcubus celerit
in illis locis sunt aequales, tempora quoque, quibus aequales arcus AM
am describuntur, erunt aequalia. Atque ideo tempus descensus in m
resistente per bma aequale est tempori descensus in vacuo per BMA.

COROLLARIUM 4

638. Ne curva bma fiat imaginaria, oportet, ut sit ubique $dx <$
Hanc ob rem debet esse

$$dt + \frac{(b-gt)^m ds}{gk^m} < ds \quad \text{seu} \quad gk^m dt < gk^m ds - (b-gt)^m ds.$$

Hoc autem ita se habet, si fuerit

$$gk^m dt < (gk^m - b^m) ds,$$

qui est casus, si t evanescit et pertinet ad punctum a, nisi t alicubi ha
valorem negativum. Quocirca ad hoc tantum est respiciendum, ut punc
a fiat reale, quod evenit, si $gk^m dt$ non maius fuerit quam $(gk^m - b^m) ds$.

COROLLARIUM 5

639. Ne igitur curva am fiat imaginaria, ante omnia necesse est, u
$b < k\sqrt[m]{g}$. Sit in puncto A $ds = \alpha dt$; erit α numerus unitate maior et ideo

$$gk^m < \alpha(gk^m - b^m) \quad \text{seu} \quad b < k\sqrt[m]{\frac{g(\alpha-1)}{\alpha}}.$$

Si ergo curva MA in A habeat tangentem horizontalem, debet esse $b <$
propter $\alpha = \infty$.

COROLLARIUM 6

640. Sit autem, si fuerit $ds = \alpha dt$ in puncto A,

$$b^m = \frac{g(\alpha-1)}{\alpha}k^m;$$

erit in ipso puncto a

$$dx = \frac{ds}{\alpha} + \frac{(\alpha-1)ds}{\alpha} = ds.$$

Hoc ergo casu curva am in a tangentem habebit verticalem.

COROLLARIUM 7

641. In initio motus in B fit $b = gt$ seu $t = \frac{b}{g}$. Pro pun
erit $dx = dt$ curvarum elementis sumtis aequalibus. Quare t
punctis B et b aequaliter erunt inclinatae.

SCHOLION 1

642. Quia curva am non absolute ex curva AM construi
praeterea nosse oportet celeritatem in puncto A seu descensus
si in curva AM aliud descensus initium accipiatur, alia invenietu
Curvae ergo BMA et bma ratione unici descensus tantum ita co
celeritates aequalibus percursis spatiis sint inter se aequales, ol
punctis initia descensus ponantur, haec convenientia non am
habebit. Non igitur dantur duae curvae, super quibus descensu
datum punctum usque inter se congruant, altera in vacuo, alte
resistente constituta.

EXEMPLUM 1

643. Sit AMB linea recta utcunque inclinata, ita ut sit
quaeratur curva amb, super qua corpus simili modo progrediat
resistente quo super AMB in vacuo. Posito autem $\frac{s}{\alpha}$ loco
sequens aequatio inter x et s pro curva quaesita amb

$$dx = \frac{ds}{\alpha} + \frac{(\alpha b - gs)^m}{g\alpha^m k^m}ds,$$

cuius integralis est

$$x = \frac{s}{\alpha} + \frac{\alpha b^{m+1}}{(m+1)g^2k^m} - \frac{(\alpha b - gs)^{m+1}}{(m+1)g^2\alpha^m k^m}.$$

ctum a fiat imaginarium, oportet, ut

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{b^m}{gk^m}<1.$$

fuerit

$$b^m=\frac{(\alpha-1)gk^m}{\alpha},$$

n a habebit tangentem verticalem neque propterea b maiorem habere valorem. Ponatur igitur corpus super linea inclinata BMA ex tanta ne descendisse, ut fiat

$$b=k\sqrt[m]{\frac{g(\alpha-1)}{\alpha}};$$

$$dx=\frac{ds}{\alpha}+\frac{(k\sqrt[m]{g\alpha^{m-1}(\alpha-1)}-gs)^m ds}{g\alpha^m k^m},$$

t aequatio pro curva amb, in qua initium descensus in b est capien-bi est $ds=\alpha dx$, seu arcus amb erit

$$=k\sqrt[m]{\frac{\alpha^{m-1}(\alpha-1)}{g^{m-1}}}.$$

tentia fuerit quadratis celeritatum proportionalis, erit $m=1$ ideoque

$$dx=\frac{ds}{\alpha}+\frac{(gk(\alpha-1)-gs)ds}{g\alpha k}=ds-\frac{sds}{\alpha k}$$

rando

$$x=s-\frac{ss}{2\alpha k}.$$

t aequatio pro cycloide super basi horizontali descripta, cuius circuli oris diameter est $\frac{\alpha k}{2}$.

COROLLARIUM 8

. Sit ergo super basi horizontali CB (Fig. 72, p. 316) descripta cyclois irculo generatore ANC et sit medium resistens in duplicata ratione um, cuius exponens sit $=k$. Si nunc in circulo ANC sumatur chorda $\frac{k}{2}$ ducaturque horizontalis PNM et ex M tangens MT atque duo

corpora ponantur descendere, alterum super MT in vacuo
curva MB in medio resistente, ambo haec corpora aequa
aequalia spatia absolvent.

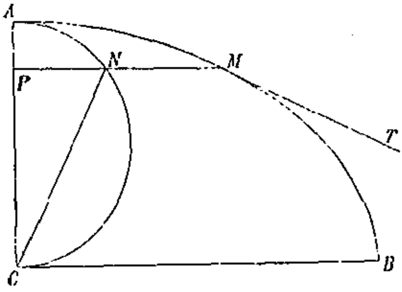


Fig. 72.

EXEMPLUM 2

645. Sit curva AMB (Fig. 71, p. 312) cyclois deorsum
circuli generatoris diameter $= \frac{a}{2}$; erit $ss = 2at$ et $t = \frac{ss}{2a}$
His ergo substitutis prodibit pro curva amb sequens aequat

$$dx = \frac{sds}{a} + \frac{(2ab - gss)^m ds}{2^m g a^m k^m};$$

vel si totus arcus AMB, qui in vacuo descensu absolvi p
erit $b = \frac{gcc}{2a}$ ideoque pro curva amb orietur ista aequatio

$$dx = \frac{sds}{a} + \frac{g^{m-1}(cc - ss)^m ds}{2^m a^m k^m}.$$

Ne igitur haec curva in puncto a fiat imaginaria, oportet sit
vel altitudo arcus AB minor esse debet quam $\frac{k}{g}\sqrt[m]{g}$; nam
arcus $AB = \frac{k}{g}\sqrt[m]{g}$, tum curvae amb tangens in b erit vert
sit cuspis cycloidis, erit $\frac{cc}{2a} = \frac{a}{2}$ seu $c = a$, et si sit praete
quo curvae amb in a tangens fiat verticalis, habebitur ista

$$dx = \frac{sds}{a} + \frac{(aa - ss)^m ds}{a^{2m}};$$

quae curva in duobus punctis a et b habebit tangentes ver

COROLLARIUM 9

646. Cum igitur corpus in vacuo super cycloide ita descendat, ut
eleratione sint spatiis percurrendis proportionales, eandem proprieta
ebit descensus in medio resistente super curva bma, si initium desce
natur in puncto b, quod per aequationem ad curvam amb determina
, scilicet $amb = c$.

COROLLARIUM 10

647. Si in curva AMB aliud descensus initium B capiatur, tota c
b alia reperietur, quia in eius aequatione longitudo arcus $AMB = c$
etur. Quare, etiamsi cyclois sit curva tautochrona in vacuo, curva
s tamen non erit in medio resistente, quia pluribus descensibus s
AB totidem curvae diversae in medio resistente respondent.

SCHOLION 2

648. Curvae hoc exemplo erutae sunt eae ipsae, quas Clar. HERMA
Comm. Tom. II. pro tautochronis in mediis resistentibus invenit;[1])
ul ipse demonstravit eas quaesito satisfacere non posse. Ceterum ex
olligitur simili modo in medio resistente curvam posse inveniri, super
pus ascendendo eodem modo moveatur quo super data curva in va
t enim puncta A et a initia ascensus, illud in vacuo, hoc in medio
nte, sitque celeritas initialis debita altitudini b; habebitur pro curva
a aequatio

$$dx = dt - \frac{(b-gt)^m ds}{gk^m};$$

qua aequatione intelligitur curvam amb non fieri posse imaginariam,
a curva AMB talis fuerit. Nam quia, ne curva amb sit imaginaria,
oet $dx < ds$, hic dx minus est quam dt, quod per se minus est quam
si linea AMB fit linea verticalis, altera amb poterit assignari; nam
a $AB = c$ erit $b = gc$ et $s = t$; quare pro curva amb invenitur ista aequ

$$dx = ds - \frac{g^{m-1}(c-s)^m ds}{k^m},$$

1) IAC. HERMANN, *Theoria generalis motuum, qui nascuntur a potentiis quibusvis in co
esinenter agentibus*, Comment. acad. sc. Petrop. 2 (1727), 1729, p. 139. P. St.

cuius integralis est

$$x = s + \frac{g^{m-1}(c-s)^{m+1} - g^{m-1}c^{m+1}}{(m+1)k^m}.$$

Accommodetur haec aequatio ad resistentiam quadratis celeritatu
nalem; fiet $m = 1$ ideoque erit

$$x = s + \frac{(c-s)^2 - c^2}{2k} = \frac{2(k-c)s + ss}{2k},$$

quae est ad cycloidem hoc modo: describatur cyclois AMB (F
circulo generatore diametri $AC = \frac{k}{2}$ super basi horizontali BC;
arcus $AM = k - c$; erit M initium ascensus, ex quo puncto, si
MA ascendat celeritate altitudini gc debita, in medio resistente
ratione celeritatum eodem modo movebitur quo in vacuo ead
initiali sursum ascendens verticaliter.

PROPOSITIO 73

PROBLEMA

649. *Si potentia fuerit uniformis et deorsum directa mediumq*
quacunque multiplicata celeritatum resistat, determinare curvam A
super qua corpus descendendo secundum horizontalem AH aequabiliter

SOLUTIO

Sit A curvae punctum supremum, per quod ducatur axis v
celeritasque, qua corpus horizontaliter progreditur, sit debita

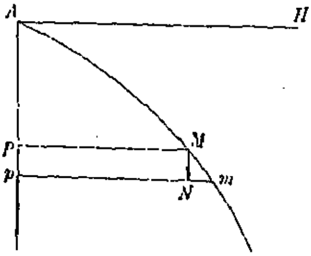


Fig. 73.

Sumatur abscissa $AP = x$, applicata
arcus $AM = s$ sitque corporis in
debita altitudini v, qua celeritate
mentum $Mm = ds$ percurret. Erit e
dy ita corporis celeritas per Mm,
ad celeritatem horizontalem $\sqrt{b}$, und

$$v = \frac{b\,ds^2}{dy^2}.$$

Iam sit potentia sollicitans $= g$, exponens resistentiae =

resistentia $= \frac{v^m}{k^m}$. His positis erit

$$dv = g\,dx - \frac{v^m ds}{k^m},$$

quae aequatio, si loco v valor $\frac{b\,ds^2}{dy^2}$ substituatur, exprimet naturam curvae quaesitae. Sit autem $ds = p\,dy$; erit

$$v = bp^2 \quad \text{et} \quad dx = dy\sqrt{(p^2 - 1)}.$$

Quocirca habebitur

$$2bp\,dp = g\,dy\sqrt{(p^2 - 1)} - \frac{b^m p^{2m+1} dy}{k^m},$$

quae separata dat

$$dy = \frac{2bk^m p\,dp}{gk^m\sqrt{(p^2 - 1)} - b^m p^{2m+1}}.$$

Curvae igitur quaesitae sequens erit constructio: sumto

$$y = \int \frac{2bk^m p\,dp}{gk^m\sqrt{(p^2 - 1)} - b^m p^{2m+1}}$$

erit

$$x = \int \frac{2bk^m p\,dp\sqrt{(p^2 - 1)}}{gk^m\sqrt{(p^2 - 1)} - b^m p^{2m+1}}.$$

Q. E. I.

COROLLARIUM 1

650. Si loco pp restituatur $\frac{v}{b}$ atque per v definiantur y et x, erit

$$y = \int \frac{k^m dv\sqrt{b}}{gk^m\sqrt{(v - b)} - v^m\sqrt{v}} \quad \text{atque} \quad x = \int \frac{k^m dv\sqrt{(v - b)}}{gk^m\sqrt{(v - b)} - v^m\sqrt{v}}.$$

Similique modo hinc erit arcus

$$s = \int \frac{k^m dv\sqrt{v}}{gk^m\sqrt{(v - b)} - v^m\sqrt{v}}.$$

Sumto autem $\frac{v}{b}$ loco pp erit

$$ds = \frac{dy\sqrt{v}}{\sqrt{b}} \quad \text{et} \quad dx = \frac{dy\sqrt{(v - b)}}{\sqrt{b}} \quad \text{atque} \quad ds = \frac{dx\sqrt{v}}{\sqrt{(v - b)}}.$$

COROLLARIUM 2

651. Quia aequatio

$$dy = \frac{k^m dv \sqrt{b}}{gk^m \sqrt{(v-b)} - v^m \sqrt{v}}$$

est separata, ex ea solutio particularis quaesito sa
ciendo denominatorem

$$gk^m \sqrt{(v-b)} - v^m \sqrt{v} = 0,$$

unde erit ipsa celeritas $\sqrt{v}$ constans. Sit ergo $v =$
atque ideo

$$ds = \frac{gk^m dx}{gk^m}$$

pro linea recta inclinata, ut supra iam invenimus (§

COROLLARIUM 3

652. Quo autem corpus data celeritate, quae
horizontaliter progrediatur, ex aequatione $\sqrt{(c-b)}$
tudo c. Qua inventa habebitur inclinatio rectae satis
poris initialis $\sqrt{c}$ in A, qua aequabiliter per rectam

COROLLARIUM 4

653. Si resistentia evanescat corpusque in vac
ideoque

$$x = \int \frac{dv}{g} \quad \text{seu} \quad v = g(a + x$$

atque

$$dy = \frac{dx \sqrt{b}}{\sqrt{(ga + gx - b)}}.$$

Integrando ergo fiet

$$y = \frac{2}{g} \sqrt{b(ga + gx - b)} - \frac{2}{g} \sqrt{b(g}$$

quae est aequatio pro parabola, quam corpus proic

EXEMPLUM

Si medium fuerit rarissimum atque ideo k valde magnum, erit

$$\frac{1}{gk^m\sqrt{(v-b)}-v^m\sqrt{v}}=\frac{1}{gk^m\sqrt{(v-b)}}+\frac{v^m\sqrt{v}}{g^2k^{2m}(v-b)} \text{ quam proxime.}$$

rem habebitur

$$y=\frac{2\sqrt{b(v-b)}}{g}+\int\frac{v^m dv\sqrt{bv}}{g^2k^m(v-b)} \quad \text{et} \quad x=\frac{v}{g}+\int\frac{v^m dv\sqrt{v}}{g^2k^m\sqrt{(v-b)}}.$$

posteriori aequatione est quam proxime

$$v=gx-\int\frac{g^m x^m dx\sqrt{gx}}{k^m\sqrt{(gx-b)}},$$

r in aequatione

$$dy=\frac{dx\sqrt{b}}{\sqrt{(v-b)}}$$

us dat aequationem inter x et y pro curva quaesita.

PROPOSITIO 74

PROBLEMA

. *Invenire curvam* AM (Fig. 74), *super qua corpus descendens in medio e resistente aequabiliter deorsum progrediatur existente potentia absoluta et deorsum directa.*

SOLUTIO

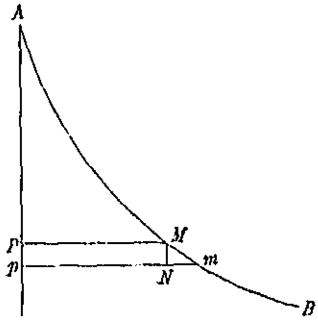


Fig. 74.

sita abscissa $AP=x$, $AM=s$ sit ce-qua corpus uniformiter descendere debet, ltitudini b. Potentia porro uniformis directa sit g et altitudo debita celeritati $=v$ atque resistentia $=\frac{v^m}{k^m}$; erit ergo

$$dv=gdx-\frac{v^m ds}{k^m}.$$

autem esse ut $Mm:MN=\sqrt{v}:\sqrt{b}$, unde erit $v=\frac{bds^2}{dx^2}$. Ex hac ergo

aequatione erit

$$ds = \frac{dx\sqrt{v}}{\sqrt{b}},$$

quo valore in aequatione substituto habebitur

$$dv = g\,dx - \frac{v^{m+\frac{1}{2}}\,dx}{k^m\sqrt{b}} \quad \text{seu} \quad dx = \frac{k^m\,dv\sqrt{b}}{gk^m\sqrt{b} - v^m \ldots}$$

Quamobrem erit

$$x = \int \frac{k^m\,dv\sqrt{b}}{gk^m\sqrt{b} - v^m\sqrt{v}}, \quad s = \int \frac{k^m\,dv\sqrt{v}}{gk^m\sqrt{b} - v^m\sqrt{\ldots}}$$

atque applicata

$$PM = y = \int \frac{k^m\,dv\sqrt{(v-b)}}{gk^m\sqrt{b} - v^m\sqrt{v}}.$$

Ex quibus aequationibus constructio curvae quaesitae cont

COROLLARIUM 1

656. Ex his tribus aequationibus, si desideretur aeq
tantum consistens, accipi potest ea, ex qua valor ipsius v
terit inveniri, isque deinceps in alterutra reliquarum subs

COROLLARIUM 2

657. Quia aequatio

$$dx = \frac{k^m\,dv\sqrt{b}}{gk^m\sqrt{b} - v^m\sqrt{v}}$$

indeterminatas a se invicem habet separatas, poterit solu
tineri ponendo

$$gk^m\sqrt{b} - v^m\sqrt{v} = 0.$$

Hinc igitur erit

$$v = g^{\frac{2}{2m+1}}\,k^{\frac{2m}{2m+1}}\,b^{\frac{1}{2m+1}}$$

ideoque

$$ds = \frac{g^{\frac{1}{2m+1}}\,k^{\frac{m}{2m+1}}\,dx}{b^{\frac{m}{2m+1}}}.$$

Satisfacit ergo linea recta inclinata, si corpus data cele
moveatur.

SCHOLION 1

58. Quod in praecedente et hoc problemate linea recta inclinata solu- praebeat particularem, ex eo intelligi potest, quod in medio resistente inclinata inveniri possit, super qua corpus aequabiliter moveatur, ut (§ 628) ostendimus. Hic autem ipse casus utrique problemati satisfacit; n corpus super recta aequabili motu incedit, tam horizontaliter quam liter aequabiliter quoque promovetur; quin etiam secundum quam- plagam aequabiliter fertur.

COROLLARIUM 3

59. Pro vacuo fit $k = \infty$. Quamobrem erit $x = \frac{v}{g}$ seu $v = gx$ atque

$$ds = \frac{dx\sqrt{gx}}{\sqrt{b}} \quad \text{et} \quad dy = \frac{dx\sqrt{(gx - b)}}{\sqrt{b}},$$

aequatio integrata dat

$$y = \frac{2(gx - b)^{\frac{3}{2}}}{3g\sqrt{b}}$$

ebet parabolam cubicalem rectificabilem, ut supra [§ 258] iam invenimus.

EXEMPLUM 1

60. Ponamus resistentiam ipsis celeritatibus proportionalem; erit $m = \frac{1}{2}$ e

$$x = \int \frac{dv\sqrt{bk}}{g\sqrt{bk} - v} = \sqrt{bk}\, l \frac{g\sqrt{bk}}{g\sqrt{bk} - v},$$

um abscissarum in eo puncto accipiatur, ubi v evanescit. Ex hac autem ione prodit

$$e^{\frac{x}{\sqrt{bk}}} = \frac{g\sqrt{bk}}{g\sqrt{bk} - v} \quad \text{seu} \quad v = e^{\frac{-x}{\sqrt{bk}}}\left(e^{\frac{x}{\sqrt{bk}}} - 1\right)g\sqrt{bk} = g\sqrt{bk}\left(1 - e^{\frac{-x}{\sqrt{bk}}}\right).$$

hoc ipsius v substituto habebitur

$$ds = \frac{dx\sqrt{g\left(1 - e^{\frac{-x}{\sqrt{bk}}}\right)\sqrt{bk}}}{\sqrt{b}}.$$

Vel cum sit
$$ds = \frac{dv\sqrt{kv}}{g\sqrt{bk-v}},$$
ponatur $v = u^2$; erit
$$ds = \frac{2u^2 du\sqrt{k}}{g\sqrt{bk-uu}} = \frac{2gk du\sqrt{b}}{g\sqrt{bk-uu}} - 2du\sqrt{k},$$
quae integrata dat
$$s = \sqrt[4]{g^2bk^3}\, l\frac{\sqrt[4]{g^2bk}+\sqrt{v}}{\sqrt[4]{g^2bk}-\sqrt{v}} - 2\sqrt{kv},$$
in qua valor ipsius v ante inventus substitui potest, quo pr
inter x et s.

EXEMPLUM 2

661. Resistat nunc medium in duplicata coleritatum ratio
ideoque
$$dx = \frac{kdv\sqrt{b}}{gk\sqrt{b}-v\sqrt{v}} \quad \text{et} \quad ds = \frac{kdv\sqrt{v}}{gk\sqrt{b}-v\sqrt{v}}.$$
Huius posterioris aequationis integrale est
$$s = \frac{2k}{3}\, l\frac{gk\sqrt{b}}{gk\sqrt{b}-v\sqrt{v}},$$
ex qua oritur
$$e^{\frac{3s}{2k}} = \frac{gk\sqrt{b}}{gk\sqrt{b}-v\sqrt{v}}$$
atque
$$v^{\frac{3}{2}} = gk\left(e^{\frac{3s}{2k}}-1\right)e^{\frac{-3s}{2k}}\sqrt{b} = gk\left(1-e^{\frac{-3s}{2k}}\right)\sqrt{b}.$$
Quocirca erit
$$\sqrt{v} = \sqrt[3]{gk\left(1-e^{\frac{-3s}{2k}}\right)\sqrt{b}};$$
qui valor in aequatione $dx = \frac{ds\sqrt{b}}{\sqrt{v}}$ substitutus dat aequationem
pro curva quaesita.

SCHOLION 2

662. Quemadmodum in his duobus problematibus curvas det
super quibus corpus motum vel secundum horizontem vel deors
liter feratur, ita simili modo problema resolvi potest, si corp

uamvis aliam plagam aequabiliter progredi debeat; ipsam autem quaestionem uia nihil concinni ex solutione deduci potest, hic omisi; atque ob eandem ausam problema isochronae paracentricae in medio resistente non attingo. diungam vero his, in quibus celeritatum quaedam lex proponitur, non arum curiosum problema, quod a nemine adhuc est tractatum, pro mediis esistentibus; quod pro vacuo propositum ne problema quidem est. Quaeritur cilicet curva, super qua corpus ad datum punctum maxima celeritate pertingat; in vacuo enim corpus super quacunque curva motum in eodem loco emper eandem obtinet celeritatem.

PROPOSITIO 75

PROBLEMA

663. *Inter omnes curvas puncta A et C* (Fig. 75) *iungentes determinare curvam AMC, super qua corpus ex A ad C descendens maximam acquirat celeritatem existente resistentia in quacunque multiplicata ratione celeritatum et potentia uniformi deorsum tendente.*

SOLUTIO

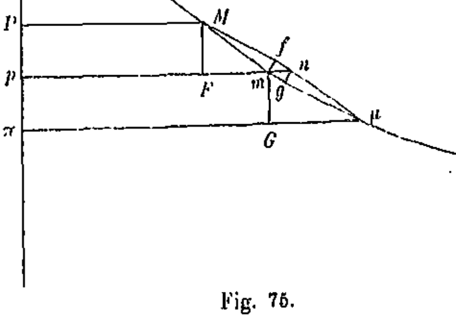


Fig. 75.

Quo corpus ad punctum C maxima cum celeritate perveniat, curvae quaesitae AMC duo quaeque elementa Mm, $m\mu$ ita posita esse debent, ut corpus ea percurrendo maximum accipiat celeritatis incrementum. Nam si corpus per alia elementa Mn, $n\mu$ maius acquireret celeritatis augmentum, maiorem quoque in C habiturum esset celeritatem. Per methodum igitur maximorum positio elementorum Mm, $m\mu$ invenietur, si elementa haec cum proximis Mn, $n\mu$ comparentur et celeritatis augmenta, quae per utraque generantur, inter se aequalia ponantur. Ducantur ad hoc ad axem verticalem applicatae MP, nmp et $\mu\pi$ sint[...]

elementa axis Pp, $p\pi$ aequalia. Ducantur quoque verticales MF, curvae elementa normales mf, ng. Iam sit potentia sollicitans $= g$ resistentiae $= k$, ipsa resistentia in $2m$-multiplicata ratione cele altitudo celeritati in M debita $= v$. His positis erit incrementum per Mm

$$= g.MF - \frac{v^m \cdot Mm}{k^m}$$

et incrementum altitudinis celeritati debitae, dum corpus per $m\mu$ p

$$= g.mG - \frac{\left(v + g.MF - \frac{v^m \cdot Mm}{k^m}\right)^m m\mu}{k^m}.$$

Dum ergo corpus elementa Mm et $m\mu$ conficit, altitudo v accipit a

$$= g(MF + mG) - \frac{v^m \cdot Mm}{k^m} - \frac{\left(v + g.MF - \frac{v^m}{k^m} Mm\right)^m m\mu}{k^m}.$$

At elementa Mn, $n\mu$ percurrendo accipiet v augmentum

$$= g(MF + mG) - \frac{v^m \cdot Mn}{k^m} - \frac{\left(v + g.MF - \frac{v^m}{k^m} Mn\right)^m n\mu}{k^m}.$$

Quibus sibi aequalibus positis habebitur

$$0 = v^m(Mn - Mm) + \left(v + g.MF - \frac{v^m}{k^m} Mn\right)^m n\mu - \left(v + g.MF - \frac{v^m}{k^m}\right.$$

Est vero $Mn - Mm = nf$ et

$$\left(v + g.MF - \frac{v^m}{k^m} Mn\right)^m = v^m + m \cdot g v^{m-1} \cdot MF - \frac{m v^{2m-1}}{k^m} M$$

atque

$$\left(v + g.MF - \frac{v^m}{k^m} Mm\right)^m = v^m + m \cdot g v^{m-1} \cdot MF - \frac{m v^{2m-1}}{k^m} M$$

Nunc vero his valoribus substituendis proveniet haec aequatio

$$v(nf - mg) - m \cdot g.MF.mg - \frac{m v^m}{k^m}(Mn \cdot n\mu - Mm \cdot m\mu) = 0.$$

$$Mn\cdot n\mu - Mm\cdot m\mu = n\mu\cdot nf - Mm\cdot mg$$

) triangula nfm, mFM et mgn, μGm similia est

$$nf = \frac{mF\cdot mn}{Mm} \quad \text{atque} \quad mg = \frac{\mu G\cdot mn}{m\mu}.$$

stitutis et per mn diviso prodit

$$v\left(\frac{mF}{Mm} - \frac{\mu G}{m\mu}\right) - m\cdot g\cdot\frac{MF\cdot\mu G}{m\mu} - \frac{mv^m}{k^m}\left(\frac{n\mu\cdot mF}{Mm} - \frac{Mm\cdot\mu G}{m\mu}\right) = 0.$$

equationis duo priora membra sunt differentialia primi gradus, ter-
o, quia differentiali secundi gradus aequipollet, reiici potest; fiet ergo

$$\frac{m\cdot g\cdot MF\cdot\mu G}{m\mu} + v\left(\frac{\mu G}{m\mu} - \frac{mF}{Mm}\right) = 0$$

$$\frac{m\cdot g\cdot MF\cdot mF}{Mm} + vd.\frac{mF}{Mm} = 0.$$

aequatione determinatur positio elementorum Mm et $m\mu$. Quo
ymbolis utamur, sit $AP = x$, $PM = y$ et $AM = s$; erit $Pp = p\pi = dx$,
y et $Mm = ds$ prodibitque

$$\frac{m\cdot gdxdy}{ds} + vd.\frac{dy}{ds} = 0.$$

vero canonica est

$$dv = gdx - \frac{v^m ds}{k^m},$$

i loco gdx ex superiore aequatione substituatur

$$\frac{-vds}{mdy}\, d.\frac{dy}{ds},$$

.

$$dv + \frac{vds}{mdy}\, d.\frac{dy}{ds} + \frac{v^m ds}{k^m} = 0$$

$$\frac{mdvdy}{ds} + vd.\frac{dy}{ds} + \frac{mv^m dy}{k^m} = 0.$$

pds et $v^{1-m} = u$; erit, ut sequitur,

$$pdu + \frac{(1-m)}{m}udp + \frac{(1-m)pds}{k^m} = 0,$$

ex qua integrata prodit

$$u = \frac{(m-1)p^{\frac{m-1}{m}}}{k^m} \int p^{\frac{1-m}{m}} ds.$$

Ex hoc u obtinebitur ergo vicissim $v = u^{\frac{1}{1-m}}$, qui valor in superi

$$mgpds\sqrt{(1-pp)} + vdp = 0$$

substitutus dabit aequationem inter p et s et consequenter inte

Ad curvam autem construendam hoc modo computum in Posito $dy = pds$ habentur hae duae aequationes

$$mgpds\sqrt{(1-pp)} + vdp = 0$$

et

$$dv = gds\sqrt{(1-pp)} - \frac{v^m ds}{k^m}.$$

Ex illa est

$$ds = \frac{-vdp}{mgp\sqrt{(1-p^2)}},$$

qui valor in hac substitutus dat

$$mpdv + vdp = \frac{v^{m+1}dp}{gk^m\sqrt{(1-pp)}}.$$

Haec divisa per $v^{m+1}p^2$ fit integrabilis eritque integrale

$$\frac{1}{v^m p} = C + \frac{\sqrt{(1-pp)}}{gk^m p}$$

seu

$$v^m = \frac{gk^m}{\alpha p + \sqrt{(1-pp)}} \quad \text{et} \quad v = \frac{k\sqrt[m]{g}}{\sqrt[m]{(\alpha p + \sqrt{(1-pp)})}}.$$

Quocirca erit

$$mgds = \frac{-kdp\sqrt[m]{g}}{p(1-pp)^{\frac{1}{2}}\sqrt[m]{(\alpha p + \sqrt{(1-pp)})}}$$

et

$$mgdx = \frac{-kdp\sqrt[m]{g}}{p\sqrt[m]{(\alpha p + \sqrt{(1-pp)})}}$$

atque

$$mgdy = \frac{-kdp\sqrt[m]{g}}{(1-pp)^{\frac{1}{2}}\sqrt[m]{(\alpha p + \sqrt{(1-pp)})}}.$$

Ex quibus aequationibus facile est curvam quaesitam construere.

COROLLARIUM 1

664. Si radius osculi curvae in M versus axem directus vocetur r, erit

$$d.\frac{dy}{ds} = -\frac{dx}{r}.$$

eoque valore substituto habetur

$$\frac{mgdy}{ds} = \frac{v}{r} \quad \text{seu} \quad \frac{2mgdy}{ds} = \frac{2v}{r}.$$

Est vero $\frac{2v}{r}$ vis centrifuga corporis in hac curva moti, cuius directio est ab axe directa, et $\frac{gdy}{ds}$ est vis normalis. Quare in curva quaesita vis centrifuga est contraria vi normali et se habet ad vim normalem ut $2m$ ad 1, id est ut exponens potestatis celeritatis, cui resistentia est proportionalis, ad unitatem.

COROLLARIUM 2

665. Hae igitur omnes curvae parte concava sunt deorsum directae. Quia enim vis normalis directio deorsum respicit et radius osculi in eandem plagam tendit, concavitas curvae quoque deorsum respicere debet.

COROLLARIUM 3

666. In medio resistente in simplici ratione celeritatum erit $2m = 1$. Hoc ergo casu vis centrifuga aequalis est et contraria vi normali. Quamobrem curva quaesito satisfaciens erit ipsa proiectoria, quam corpus proiectum libere describit.

COROLLARIUM 4

667. Quia in aequatione

$$mgds = \frac{-kdp\sqrt[m]{g}}{p(1-pp)^{\frac{1}{2}}\sqrt[m]{(\alpha p + \sqrt{(1-pp)})}}$$

indeterminatae sunt separatae, tres solutiones particulares inde obtinentur. Primam dat aequatio $\alpha p + \sqrt{(1-pp)} = 0$, quo casu celeritas fit infinita et quaevis recta satisfacit. Secunda est $p = 1$ seu $dy = ds$, quae est pro recta horizontali, et tertia est $p = 0$, pro recta verticali; quae semper hanc habet proprietatem, ut corpus in ea descendens maxima celeritatis augmenta accipiat.

EXEMPLUM 1

668. Resistat medium in simplici ratione celeritatum; matur ex tribus inventis aequationibus ea, quae dy continet

$$dy = \frac{-2gkdp}{(\alpha p + \sqrt{(1-pp)})^2 \sqrt{(1-pp)}},$$

cuius integralis est

$$y = C - \frac{2gkp}{\alpha p + \sqrt{(1-pp)}}.$$

Cum autem sit

$$p = \frac{dy}{ds} \quad \text{et} \quad \sqrt{(1-pp)} = \frac{dx}{ds},$$

erit

$$y = C - \frac{2gkdy}{\alpha dy + dx},$$

seu neglecta constante C, quia curvam non immutat, erit

$$\alpha ydy + ydx + 2gkdy = 0.$$

Quae aequatio per y divisa et denuo integrata dat

$$\alpha y + x + 2gk\, ly = C.$$

Quae est aequatio pro curva logarithmicali ea ipsa, quam li proiectoriam in hac resistentiae hypothesi invenimus.

EXEMPLUM 2

669. Sit nunc resistentia quadratis celeritatum proportio Sumatur aequatio ista

$$ds = \frac{-kdp}{p(1-pp)^{\frac{1}{2}}(\alpha p + \sqrt{(1-pp)})}.$$

Huius autem integralis est

$$s = k\,l\,\frac{\alpha p + \sqrt{(1-pp)}}{\beta p} \quad \text{sive} \quad e^{\frac{s}{k}} = \frac{\alpha p + \sqrt{(1-pp)}}{\beta p} = \alpha$$

Hinc fit

$$\beta e^{\frac{s}{k}} dy - \alpha dy = dx \quad \text{atque} \quad ds = dy\sqrt{\Big(1 + \big(\beta e^{\frac{s}{k}}}$$

quatio pro curva quaesita, quae hanc habebit proprietatem, ut ga corporis sit duplo maior quam vis normalis. Curva igitur rsum premetur vi aequali vel ipsi vi normali vel dimidio vis In hac vero curva corpus ita movebitur, ut altitudo celeritati , sit

$$=\frac{gk}{e^{\frac{s}{k}}\beta p}=\frac{gkds}{\beta e^{\frac{s}{k}}dy}=\frac{gkds}{dx+\alpha dy}.$$

SCHOLION 1

ım in quavis resistentiae hypothesi peculiaris ratio inter vim et vim normalem locum habeat, vacuum autem tanquam casus sistentiae considerari queat, sequitur in vacuo quamvis curvam lebere. Omnes enim curvae in vacuo hanc habent proprietatem, ex aequalibus altitudinibus aequales generentur celeritates, ideo- otest definiri, quae potius quam reliquae quaesito satisfaciant.

SCHOLION 2

otatu dignum est, quod in omnibus his curvis inventis nusquam oritas sit aequalis nihilo. Atque idcirco problema hac methodo olvi potest, ut determinetur inter omnes descensus ex A ad C ex s is, in quo corpus maximam acquirit celeritatem; cui quaestioni verticalis per C transiens et cum horizontali per A ducta con- 'acit. Nostra autem solutio ita est comparata, ut duorum ele- quorumque contiguorum positionem eam definiat, quae maximum n celeritatis augmentum producat. Quamobrem hac methodo ea itur, super qua corpus motum vel maius vel minus celeritatis acquirit quam super alia quacunque curva A et C iungente, si A eadem celeritate descensum inchoet. Ex inventis autem colligi ratione eam prodire curvam, super qua minimum celeritatis in- generetur, vel super qua corpus motu maxime uniformi feratur. sensu facile perspicitur motum ex quiete incipere non posse. enim certum est, si puncta A et C in linea verticali sunt posita. erticali motu in A ex quiete facto maximam in C generari cele- nen calculus non hanc dat solutionem, etiamsi praebeat lineam sed celeritatem initialem in A facit debitam altitudini $k\sqrt[m]{g}$, quae

celeritas tanta est, ut non amplius augmentum ... celeritate corpus aequabiliter ex A ad C descendet; haecque rat... hoc est minimum, capit celeritatis incrementum. Problema ergo ... consentaneum fuisset, ita proponi debuisset: inter omnes lineas ... C iungentes eam determinare, super qua corpus motum minima ... ritatis augmenta, atque simul celeritatem initialem in A huic ... commodatam definire.

SCHOLION 3

672. Secundum ordinem praescriptum sequi deberent nu... problemata, in quibus temporum quadam lege data curvae e... gandae idoneae; sed cum temporum leges pleraeque ad celer... possint reduci, huiusmodi quaestiones non profero. Sed un... negotio quaestionem de curvis brachystochronis tractabo, quia ... poris praescripta est conditio, ad celeritatum rationes, quas iam ... reduci non potest. Qua in re iisdem praemissis utar, quae supra ... circa brachystochronas in vacuo sunt tradita.

PROPOSITIO 76

THEOREMA

673. *In medio quocunque resistente et potentiarum absolutarum ... cunque ea curva* AMC (Fig. 76) *est brachystochrona seu brevissimu... producit descensum, in qua ... est aequalis vi normali et in ... directa.*

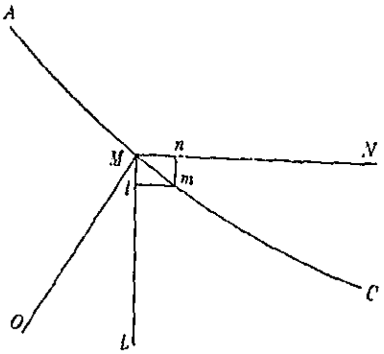


Fig. 76.

DEMONSTRATI...

Quaecunque fuerint poten... in corpus in M agentes, eae ... se normales possunt resolvi... tera sit $ML = P$, altera MN... curvae elemento $Mm = ds$ ... pendiculis ml, mn sit $Ml =$... $ml = Mn = dy$. Ponatur altitudo celeritati in M debita $= v$ e... tiae $= R$ atque radius osculi in M $= r$, quem pono sursum di...

onstante sit $r = \frac{ds^3}{dx\,ddy}$. His positis erit

$$dv = Pdx + Qdy - Rds,$$

$\frac{Pdx + Qdy}{ds}$ est vis tangentialis ex potentiis P et Q orta. At supra ex hystochronismi, si fuerit

$$dv = Pdx + Qdy + Rds,$$

ore

$$\frac{2v}{r} = \frac{Pdy - Qdx}{ds}.$$

e formulae ab hac nostra tantum in signo litterae R differunt, computum non venit. Denotat autem $\frac{2v}{r}$ vim centrifugam secundum normalem MO agentem atque $\frac{Pdy - Qdx}{ds}$ est vis normalis iuxta MO raque vi P et Q orta. Quare si fuerit vis centrifuga vi normali in eandem plagam directa, curva erit brachystochrona. Q. E. D.

COROLLARIUM 1

vis normalis, quae oritur ex resolutione potentiarum absolutarum itantium, vocetur N et vis tangentialis ex eadem resolutione orta erit

$$dv = (T - R)ds \quad \text{et} \quad \frac{2v}{r} = N,$$

equationes coniunctae dabunt curvam brachystochronam.

COROLLARIUM 2

uaecunque igitur fuerit resistentia, erit semper $v = \frac{Nr}{2}$, unde poris super brachystochrona facile invenitur. Erit enim ut vis ad vim normalem N, ita dimidium radii osculi ad altitudinem M debitam.

SCHOLION

oc eadem proportio quoque locum habet in motu corporum proero; est enim pariter pro motu libero vis centrifuga aequalis vi scrimen autem in hoc consistit, ut in motu libero vires contri-

fuga et normalis sint inter se oppositae, pro curvis brachysto
conspirantes, sive in motu libero directiones radii osculi r et
coincidunt, in brachystochronis vero inter se sunt contrariae.
hic sumsimus

$$r = \frac{ds^3}{dx\,ddy},$$

cum in motu libero sit

$$r = \frac{-ds^3}{dx\,ddy}.$$

COROLLARIUM 3

677. Cum ex formula brachystochronismi indolem conti
$v = \frac{Nr}{2}$, si hic valor ubique loco v in altera aequatione $dv = ($
stituatur, habebitur aequatio naturam curvae brachystochronae

COROLLARIUM 4

678. In quocunque ergo medio resistente et quibuscunque
corpus potentiis eae curvae omnes erunt brachystochronae, i
quam sustinent, pressio duplo maior est quam vel sola vis
sola ex potentiarum sollicitantium resolutione orta vis normal

PROPOSITIO 77

PROBLEMA

679. *In medio uniformi, quod resistit in ratione quacunque m*
tatum, et potentia absoluta existente uniformi et deorsum directa dete
brachystochronam AM (Fig. 74, p. 321), *super qua corpus descend*
vissimo ex A ad M perveniat.

SOLUTIO

Positis in axe verticali abscissa $AP = x$ eique respon
$PM = y$ arcuque curvae quaesitae $AM = s$ sit g potentia deo
et $\frac{v^m}{k^m}$ resistentia in M, si quidem celeritas in M fuerit debi

erit vis normalis $= \frac{gdy}{ds}$; cui aequalis esse debet vis centrifuga,

$$\frac{2v}{r} = \frac{2vdxddy}{ds^3}$$

to dx pro constante. Facta ergo aequatione est

$$v = \frac{gds^2dy}{2dxddy}.$$

ero canonica pro descensu in hoc medio resistente dat

$$dv = gdx - \frac{v^m ds}{k^m}.$$

a aequatio posito $dsdds$ loco $dyddy$ propter dx constans abit

$$v = \frac{gdsdy^2}{2dxdds},$$

$$+ \frac{gdsdyddy}{dxdds} - \frac{gdsdy^2d^3s}{2dxdds^2} = \frac{gdy^2}{2dx} + \frac{gds^2}{dx} - \frac{gdsdy^2d^3s}{2dxdds^2} = gdx - \frac{v^m ds}{k^m},$$

tio reducta dat

$$\frac{gdsdy^2d^3s}{2dxdds^2} - \frac{3gdy^2}{2dx} = \frac{g^m ds^{m+1} dy^{2m}}{2^m k^m dx^m dds^m}$$

$$dsd^3s - 3dds^2 = \frac{g^{m-1} ds^{m+1} dy^{2m-2}}{2^{m-1} k^m dx^{m-1} dds^{m-2}};$$

equatio exponit naturam curvae quaesitae. Quae aequat ad constructionem praeparetur, pono $ds = pdx$, ut sit

$$dy = dx\sqrt{(p^2 - 1)},$$

$$dds = dpdx \quad \text{et} \quad d^3s = dxddp.$$

antis habebitur ista aequatio

$$pddp - 3dp^2 = \frac{g^{m-1} p^{m+1} dx^m (pp - 1)^{m-1}}{2^{m-1} k^m dp^{m-2}}.$$

Nunc sit porro $dx = qdp$; erit

$$ddx = 0 = dqdp + qddp \quad \text{seu} \quad ddp = \frac{-dpdq}{q}$$

orieturque haec aequatio

$$-\frac{pdq}{q} - 3dp' = \frac{g^{m-1}p^{m+1}q^m dp(p^2-1)^{m-1}}{2^{m-1}k^m}$$

seu

$$\frac{-pdq - 3qdp}{q^{m+1}} = \frac{g^{m-1}p^{m+1}dp(p^2-1)^{m-1}}{2^{m-1}k^m}.$$

Multiplicetur haec aequatio, quo integrabilis fiat, per mp^{-3m-1}

$$-mp^{-3m}q^{-m-1}dq - 3mp^{-3m-1}q^{-m}dp = \frac{mg^{m-1}p^{-2m}dp(p^2-1)^{m}}{2^{m-1}k^m}$$

cuius integralis est

$$p^{-3m}q^{-m} = \frac{mg^{m-1}}{2^{m-1}k^m}\int\frac{(p^2-1)^{m-1}dp}{p^{2m}}.$$

Ponatur

$$\frac{mg^{m-1}}{2^{m-1}k^m}\int\frac{(p^2-1)^{m-1}dp}{p^{2m}} = P^{-m};$$

erit P functio quaedam ipsius p et proinde dabitur, concessis salt
turis. His igitur positis erit

$$p^3q = P \quad \text{atque} \quad q = \frac{P}{p^3}.$$

Quia vero est $dx = qdp$, erit

$$x = \int\frac{Pdp}{p^3} \quad \text{et} \quad s = \int\frac{Pdp}{p^2} \quad \text{atque} \quad y = \int\frac{Pdp\sqrt{(p^2-1)}}{p^3}.$$

Unde constructio curvae brachystochronae sequitur. Q. E. I.

COROLLARIUM 1

680. Sit A punctum, in quo motus incipit atque celeritas
erit ibi $v = 0$ seu

$$\frac{gdsdy^2}{2dxdds} = 0,$$

unde fit $dy = 0$, quia ds evanescere non potest. In puncto A er
habebit tangentem verticalem.

COROLLARIUM 2

. Quia in ipso motus initio motus in medio resistente a motu in
non discrepat, curvae AM initium A a cycloidis cuspide, quae est
tochrona in vacuo, non discrepabit. Ideoque in A non solum tangens
ticalis, sed etiam radius osculi in eo loco erit infinite parvus.

COROLLARIUM 3

2. Quia in A est $dy = 0$ atque est $dy = dx\sqrt{(p^2-1)}$, erit pro puncto A
Ex data ergo curvae constructione punctum A obtinebitur, si
$= 1$. Integralia ergo illa ita debebunt accipi, ut x, s et y evanescant
$p = 1$.

COROLLARIUM 4

3. Quoniam est

$$v = \frac{gdsdy^2}{2dxdds},$$

pter $ds = pdx$ et $dds = dpdx$

$$v = \frac{gpdx(p^2-1)}{2dp}$$

b $dx = qdp$ erit

$$v = \frac{gpq(pp-1)}{2} = \frac{gP(pp-1)}{2p^2}.$$

atet v evanescere, si sit $p = 1$.

COROLLARIUM 5

4. Radius osculi in puncto quocunque M est

$$= \frac{ds^3}{dxddy} = \frac{ds^2dy}{dxdds}.$$

ob $ds = pdx$ erit radius osculi

$$r = \frac{p^3dx\sqrt{(p^2-1)}}{dp} = p^2q\sqrt{(p^2-1)} = \frac{P\sqrt{(p^2-1)}}{p}.$$

cto ergo A, ubi est $p = 1$, erit radius osculi $r = 0$.

COROLLARIUM 6

685. Sit B punctum brachystochronae, in quo tangens est ... erit ibi $dy = \infty$ ideoque $p = \infty$. Punctum igitur B invenietur por... Erit ergo in hoc puncto $v = \frac{gP}{2}$ et radius osculi $r = P$.

EXEMPLUM 1

686. Ponamus resistentiam evanescentem, ita ut motus fi... erit $k = \infty$ ideoque habebitur

$$dsd^3s - 3dds^2 = 0.$$

Quae aequatio divisa per $dsdds$ et integrata dat

$$ldds - 3lds = lC$$

seu

$$\frac{dds}{ds^3} = \frac{1}{adx} = \frac{dx}{adx^2}.$$

Haec aequatio denuo integrata dat

$$-\frac{1}{2ds^2} = \frac{x}{adx^2} + C.$$

Vel mutatis constantibus positoque $ds = pdx$ erit ... a ... ppx ... quia posito $p = 1$ x debet evanescere, abit in hanc

$$x = \frac{a(pp-1)}{pp} \quad \text{seu} \quad p = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{(a-x)}} \quad \text{ideoque} \quad ds = \frac{dx\sqrt{\ldots}}{\sqrt{(a \ldots}}$$

quae est aequatio pro cycloide, ut constat.

EXEMPLUM 2

687. Resistat medium in duplicata ratione celeritatum; erit ...

$$\frac{1}{P} = \frac{1}{k}\int\frac{dp}{p^2} = C - \frac{1}{kp}.$$

Unde fit

$$P = \frac{kp}{Ckp - 1} = \frac{akp}{kp - a}.$$

em erit

$$x = \int \frac{akdp}{p^2(kp-a)} \quad \text{et} \quad s = \int \frac{akdp}{p(kp-a)}.$$

$$s = k\,l\frac{kp-a}{(k-a)p} \quad \text{atque} \quad e^{\frac{s}{k}} = \frac{kp-a}{(k-a)p} = \frac{kds-adx}{(k-a)ds}$$

dx. Porro ergo habebitur

$$(k-a)e^{\frac{s}{k}}ds = kds - adx,$$

rata dat

$$k(k-a)e^{\frac{s}{k}} = ks - ax + k(k-a).$$

ata quantitate exponentiali $e^{\frac{s}{k}}$ erit

$$ksds - axds - akds + akdx = 0.$$

nentialem $e^{\frac{s}{k}}$ per seriem exprimere velimus, erit

$$-k(k-a) = k(k-a)\left(\frac{s}{k} + \frac{ss}{1\cdot 2k^2} + \frac{s^3}{1\cdot 2\cdot 3k^3} + \frac{s^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4k^4} + \text{etc.}\right).$$

substituta dat

$$\frac{a(s-x)}{k-a} = \frac{s^2}{1\cdot 2k} + \frac{s^3}{1\cdot 2\cdot 3k^2} + \frac{s^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4k^3} + \text{etc.}$$

puncto M est

$$v = \frac{gak(pp-1)}{2p(kp-a)}.$$

B vero, in quo tangens est , erit

$$l\frac{k}{k-a} \quad \text{atque} \quad e^{\frac{s}{k}} = \frac{k}{k-a}$$

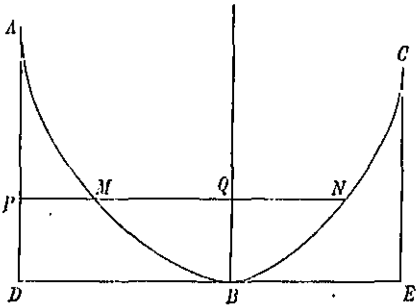


Fig. 77.

$$x = -k + \frac{kk}{a}\,l\frac{k}{k-a}.$$

r nunc curva ultra B in BNC (Fig. 77); cuius natura ut inveniatur,

in axe BQ ponatur abscissa $BQ = t$ et arcus BN

$$AP = x = -k - t + \frac{k^2}{a}\, l\, \frac{k}{k-a} \quad \text{et} \quad AMN$$

Erit ergo

$$e^{\frac{s}{k}} = \frac{k}{k-a}\, e^{\frac{z}{k}};$$

quibus valoribus in superiore aequatione substitutis

$$k^2 e^{\frac{z}{k}} = kz + k^2 + at \quad \text{seu} \quad at = k^2(e^{\frac{z}{k}}$$

Atque per seriem

$$at = \frac{z^2}{1\cdot 2} + \frac{z^3}{1\cdot 2\cdot 3k} + \frac{z^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4k^2}$$

pro curva BNC; at pro ramo BMA, in quo erit arc

$$at = k^2(e^{\frac{-z}{k}} - 1) + kz = \frac{z^2}{1\cdot 2} - \frac{z^3}{1\cdot 2\cdot 3k} + 1$$

Curva vero BNC in C habebit quoque tangentem v invenitur ponendo $dz = dt$. Fiet vero hoc posito

$$a = ke^{\frac{z}{k}} - k \quad \text{seu} \quad z = kl\frac{a+k}{k} =$$

atque

$$t = CE = k - \frac{kk}{a}\, l\, \frac{a+k}{k} = \frac{a}{2} - \frac{a^2}{3k} + \frac{a}{4}$$

cum contra sit

$$AD = \frac{a}{2} + \frac{a^2}{3k} + \frac{a^3}{4k^2} + \text{etc.}$$

Ex quo apparet punctum A esse altius positum qua A et C curvam habere cuspides seu puncta reversioni CE sint curvae diametri; id quod ex hoc intelligitur

$$y = \int \frac{P\,dp\sqrt{(pp-1)}}{p^3},$$

ubi $\sqrt{(p^2 - 1)}$ valorem habet tam affirmativum quam

SCHOLION 1

88. Infra perspicietur hanc curvam brachystochronam congruere cum tautochrona in eadem resistentiae hypothesi. Haec vero inter motus hronos et brachystochronos interest differentia, ut ad tautochronismum ndum corpus in ramo CNB descendere, in altero ascendere debeat, cum rario pro brachystochronismo descensus per AMB fieri debeat. Interim haec utriusque curvae convenientia attentione digna videtur, cum et uo eadem congruentia observetur.

EXEMPLUM 3

89. Resistat medium in quadruplicata ratione celeritatum, ita ut sit Habebitur ergo pro curva quaesita ista aequatio

$$dsd^3s - 3dds^2 = \frac{gds^3dy^2}{2k^2dx},$$

nstruendam vero curvam

$$\frac{1}{P^3} = \frac{g}{k^2}\int\left(\frac{dp}{p^3} - \frac{dp}{p^4}\right);$$

rit

$$P = \frac{kp\sqrt{3np}}{\sqrt{g(p^3 - 3np^2 + n)}}$$

$$s = \int\frac{kdp\sqrt{3n}}{\sqrt{g(p^4 - 3np^3 + np)}}$$

$$x = \int\frac{kdp\sqrt{3n}}{p\sqrt{g(p^4 - 3np^3 + np)}} \quad \text{ac} \quad y = \int\frac{kdp\sqrt{3n(pp-1)}}{p\sqrt{g(p^4 - 3np^3 + np)}}.$$

ergo curvae constructio uti generalis habetur. Quia autem n numerum unque denotat, sit $n = \frac{1}{2}$; erit

$$y = \int\frac{kdp\sqrt{3}}{p\sqrt{g(2p^3 - p)}} = \frac{2k\sqrt{3(2p-1)}}{\sqrt{gp}} - \frac{2k\sqrt{3}}{\sqrt{g}};$$

constantem ideo adiecimus, quo fiat $y = 0$ posito $p = 1$.[1]) Atque posito

[1]) Posito $n = \frac{1}{2}$ erit

$$y = \int\frac{kdp\sqrt{3(pp-1)}}{p\sqrt{g(2p^4 - 3p^3 + p)}},$$

rmula, quia $2p^4 - 3p^3 + p$ factorem $pp - 1$ non continet, reductionem ab EULERO factam nittit. Itaque etiam formulae sequentes locum non habent. P. St.

$p=\infty$ erit applicata

$$DB = \frac{2k(\sqrt{6}-\sqrt{3})}{\sqrt{g}}.$$

Fit autem

$$p = \frac{12k^2}{12k^2 - 4ky\sqrt{3g} - gy^2}$$

atque

$$\sqrt{(p^2-1)} = \frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{(96k^3y\sqrt{3g} - 24gk^2y^2 - 8gky^3\sqrt{3g} - g}}{12k^2 - 4ky\sqrt{3g} - gy^2}$$

Ex quo oritur

$$x = \int \frac{12k^2dy - 4kydy\sqrt{3g} - gy^2dy}{\sqrt{(96k^3y\sqrt{3g} - 24gk^2y^2 - 8gky^3\sqrt{3g} - g^2y^4)}}$$

$$= \int \frac{12k^2dy - 4kydy\sqrt{3g} - gy^2dy}{\sqrt{(gy^2 + 4ky\sqrt{3g})(24k^2 - 4ky\sqrt{3g} - gy^2)}},$$

quae est aequatio inter coordinatas x et y pro curva quaesita

SCHOLION 2

690. In medio, quod in simplici celeritatum ratione resi
chronam simplicius determinare non licet, quam statim ex
structione consequitur. Quamobrem hunc resistentiae casun
sumus prosecuti. Quod autem ad reliquas huc pertinentes p
tinet, in quibus curva quaeritur, super qua corpus descende
datam lineam, sive rectam sive curvam, perveniat, ea simili
stente medio solvuntur quo pro vacuo. Cum scilicet ex e
innumerabiles egrediantur curvae brachystochronae, ex iis
quae datae lineae, sive rectae sive curvae, ad angulos rectos
hac enim corpus ad istam lineam brevissimo tempore pervenit
dente est demonstratum. Simili ratione curva, quae omnes b
ad angulos rectos traiicit, ab omnibus arcus abscindet
quos corpus descendens aequalibus temporibus absolvit.
eodem se habent modo, quaecunque fuerit resistentia et quae
absolutae. Problema autem brachystochronarum generalis
evolvemus.

PROPOSITIO 78

PROBLEMA

In medio resistente quocunque et potentiis sollicitantibus quibuscunque curvam brachystochronam AM (Fig. 78), *super qua corpus descendens ex citissime perveniat.*

SOLUTIO

A motus initium, per quod ducatur recta quaecunque AP pro axe in qua sumatur abscissa $AP = x$; cui respondeat applicata $PM = y$ $AM = s$. Sit porro corporis in M debita altitudini v et resistentia ut- celeritate pendens $= R$. Quaecunque rpus sollicitent potentiae absolutae, co duae potentiae substitui possunt directionibus ML et MN, quarum AP sit parallela, haec vero ad illum Vis autem corpus secundum ML sit $= P$ et vis secundum $MN = Q$. ribus oritur

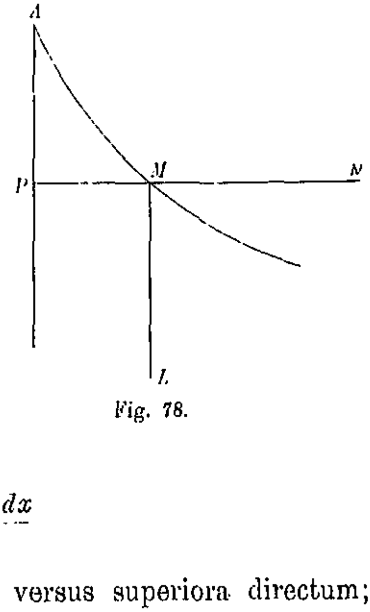


Fig. 78.

$$dv = Pdx + Qdy - Rds.$$

tura brachystochronismi dat

$$\frac{2v}{r} = \frac{2vdxddy}{ds^3} = \frac{Pdy - Qdx}{ds}$$

enotante r radium osculi curvae in M versus superiora directum; ergo sumto dx constante ponimus $\frac{+ds^3}{dxddy}$, cum alias deberet esse $\overline{y}$. Ex his ergo duabus aequationibus

$$dv = Pdx + Qdy - Rds \quad \text{et} \quad \frac{2vdxddy}{ds^2} = Pdy - Qdx$$

etur v, habebitur aequatio pro curva brachystochrona quaesita; est

$$v = \frac{Pdyds^2 - Qdxds^2}{2dxddy};$$

ferentiale loco dv atque ipsum v in resistentia R substitutum dabit em pro curva quaesita. Q. E. I.

692. Aequatio pro curva, si dicto modo v eliminetur, fi
tertii gradus. Quare si triplex integratio adhibeatur, tres quo
adiici poterunt, quibus effici potest, ut evanescente x simul qu
v evanescant atque praeterea curva per datum punctum M tra

COROLLARIUM 2

693. Quia igitur semper curva brachystochrona potest exh
tium habeat in A et per datum punctum transeat, infinitae
stochronae ex puncto A educi possunt.

COROLLARIUM 3

694. Inventa aequatione pro curva brachystochrona AM in
corporis super ea descendentis celeritas in singulis punctis; eri

$$v = \frac{Pdyds^2 - Qdxds^2}{2dxddy}.$$

COROLLARIUM 4

695. Data celeritate determinari ex ea poterit tempus, qu
AM absolvit; erit scilicet tempus per AM

$$= \int \frac{ds}{\sqrt{v}} = \int \frac{\sqrt{2dxddy}}{\sqrt{(Pdy - Qdx)}};$$

quod propter aequationem inter x et y iam inventam pote
quadraturas exhiberi.

COROLLARIUM 5

696. Si igitur curva esset invenienda, quae omnes brach
A eductas ad angulos rectos traiicere deberet, tum eius line
haberetur, si ab omnibus abscinderetur

$$\int \frac{\sqrt{2dxddy}}{\sqrt{(Pdy - Qdx)}}$$

eiusdem magnitudinis. Hac enim ratione ab istis curvis infinitis arcus is
hroni abscinduntur, qui, quoniam omnes curvae sunt brachystochrona
erminabuntur ad traiectoriam orthogonalem.

EXEMPLUM

697. Sit resistentia quadratis celeritatum proportionalis atque expone
esistentiae utcunque variabilis q; erit $R = \frac{v}{q}$. Cum ergo sit

$$dv = Pdx + Qdy - \frac{vds}{q},$$

rit integrando

$$e^{\int \frac{ds}{q}} v = \int e^{\int \frac{ds}{q}} (Pdx + Qdy).$$

um autem sit

$$v = \frac{Pdyds^2 - Qdxds^2}{2dxddy},$$

rit

$$2dxddy \int e^{\int \frac{ds}{q}} (Pdx + Qdy) = e^{\int \frac{ds}{q}} ds^2 (Pdy - Qdx),$$

n qua aequatione non amplius inest v. Interim tamen haec aequatio
ifferentialis tertii gradus, si differentiatione signa integralia tollantur;
eterminati praeterea ipsarum P, Q et q valores in causa sunt, quo min
equatio ad constructionem praeparari queat.

SCHOLION

698. Quae hic ex duabus potentiis P et Q circa curvas brachystochron
unt deducta, latissime patent, quia, quotcunque potentiae corpus solli
averint, eae omnes in huiusmodi duas possunt resolvi, si modo omniu
irectiones in eodem plano fuerint positae. Quamobrem in hac quoque p
ositione continentur brachystochronae pro quacunque virium centripetaru
ypothesi, quas autem, quia neque concinnae neque construibiles aequation
roveniunt, ulterius non persequimur. Missis igitur his, in quibus celeritatu
uaedam lex praescribitur, progredimur ad sequentes quaestiones, in quib
urvae requiruntur, quae a corpore super iis moto datam sustineant pr
ionem.

PROPOSITIO 79

PROBLEMA

699. *In hypothesi gravitatis uniformis et medio*
quacunque celeritatum resistit, determinare curvam aequabi
quae a corpore super ea descendente ubique eandem sust

SOLUTIO

Positis $AP = x$, $PM = y$, $AM = s$ et celeritat
$= v$ sit potentia corpus deorsum secundum ML tral

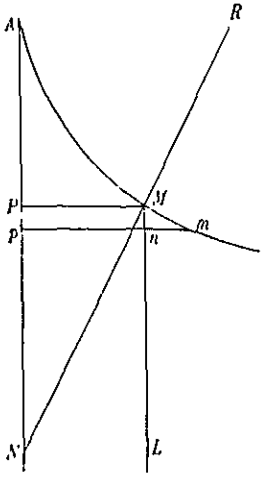


Fig. 79.

tiae in $M = \frac{v^m}{k^m}$. Erit
elementum Mm progreditu

$$dv = gdx$$

Ponamus curvam deorsum
MR sit radii osculi directio
$MR = \frac{ds^3}{dxddy}$ posito dx co
fugae directio erit in norm
titas est $= \frac{2vdxddy}{ds^3}$. Secun
tionem curva premitur a
potentiae $ML = g$ orta, qu
vis, qua curva secundum

$$= \frac{gdy}{ds} + \frac{2v$$

quae cum debeat esse constans, ponatur ea aequalis

$$\alpha g ds^3 = gdyds^2 + 2vdxddy$$

atque hinc

$$v = \frac{\alpha g ds^3 - gdyds^2}{2dxddy}.$$

Sit $ds = pdx$ atque $dy = dx\sqrt{(p^2-1)}$; erit

$$ddy = \frac{pdpdx}{\sqrt{(p^2-1)}}.$$

ubstitutis erit

$$= \frac{(\alpha g p^3 dx - g p^3 dx \sqrt{(p^2-1)})\sqrt{(pp-1)}}{2pdp} = \frac{\alpha g p^3 dx \sqrt{(p^2-1)} - gpdx(p^2-1)}{2dp}.$$

orro $dx = 2qdp$; erit

$$v = gpq(\alpha p \sqrt{(p^2-1)} - p^2 + 1)$$

$$v = Pq$$

,

$$gp(\alpha p \sqrt{(p^2-1)} - p^2 + 1) = P.$$

ergo

$$dv = Pdq + qdP \quad \text{et} \quad v^m = P^m q^m.$$

s valoribus in aequatione $dv = gdx - \frac{v^m ds}{k^m}$ substitutis prodibit

$$Pdq + qdP = gdx - \frac{P^m q^m ds}{k^m}.$$

vero

$$dx = 2qdp \quad \text{et} \quad ds = pdx = 2pqdp.$$

obrem proveniet ista aequatio

$$Pdq + qdP = 2gqdp - \frac{2P^m q^{m+1} pdp}{k^m},$$

duas tantum continet variabiles p et q, quia P per p datur. Ad ha tionem construendam ponatur

$$q = \frac{1}{Pu^{\frac{1}{m}}};$$

facto obtinebitur ista aequatio

$$du + \frac{2mgudp}{P} = \frac{2mpdp}{k^m P};$$

ducta in $e^{2mg\int\frac{dp}{P}}$ et integrata abit in hanc

$$u = \frac{2me^{-2mg\int\frac{dp}{P}}}{k^m} \int \frac{e^{2mg\int\frac{dp}{P}} pdp}{P}.$$

Hinc ergo invenitur u per p, atque u invento erit $q = \frac{1}{Pu^m}$, atq

$$x = \int \frac{2\,dp}{Pu^m} \quad \text{et} \quad s = \int \frac{2p\,dp}{Pu^m} \quad \text{et} \quad y = \int \frac{2\,dp\sqrt{(p^2-1)}}{Pu^m}.$$

Cum autem sit

$$P = gp(\alpha p\sqrt{(p^2-1)} - p^2 + 1),$$

erit

$$\frac{g\,dp}{P} = \frac{dp}{p} + \frac{dp}{\alpha\sqrt{(p^2-1)}} + \frac{(1-\alpha^2)\,dp}{\alpha^2 p - \alpha\sqrt{(p^2-1)}}$$

atque

$$\int \frac{g\,dp}{P} = lp - l(\alpha p - \sqrt{(p^2-1)})$$

et

$$e^{2mg\int\frac{dp}{P}} = p^{2m}(\alpha p - \sqrt{(p^2-1)})^{-2m}.\text{[1]}$$

Est vero

$$\int \frac{e^{2mg\int\frac{dp}{P}}\,p\,dp}{P} = \frac{e^{2mg\int\frac{dp}{P}}\,p}{2mg} - \frac{1}{2mg}\int e^{2mg\int\frac{dp}{P}}\,dp.$$

Quocirca erit

$$u = \frac{p}{gk^m} - \frac{e^{-2mg\int\frac{dp}{P}}}{gk^m}\int e^{2mg\int\frac{dp}{P}}\,dp = \frac{p}{gk^m} - \frac{\int p^{2m}(\alpha p - \sqrt{(p^2-1)})^{-2m}\,dp}{gk^m p^{2m}(\alpha p - \sqrt{(p^2-1)})^{-2m}}$$

Cum igitur hoc modo ex p inveniri possit u, curvae quaesitae hinc perficietur. Q. E. I.

COROLLARIUM 1

700. Curva inventa ergo hanc habebit proprietatem, ut in qu M prematur versus MN vi constanti, quae est ad vim gravitatis α ad 1.

---

1) Editio princeps:

$$\int \frac{g\,dp}{P} = lp + \frac{1}{\alpha}l(p + \sqrt{(p^2-1)}) - \frac{(\alpha+1)}{2\alpha}\,l\frac{\alpha p - \sqrt{(p^2-1)}}{p - \sqrt{(p^2-1)}}$$

et

$$e^{2mg\int\frac{dp}{P}} = p^{2m}(p - \sqrt{(p^2-1)})^{\frac{m(\alpha-1)}{\alpha}}(\alpha p - \sqrt{(p^2-1)})^{\frac{-m(\alpha+1)}{\alpha}}.$$

Corre

2) Editio princeps:

$$\frac{p}{gk^m} - \frac{\int p^{2m}(p - \sqrt{(p^2-1)})^{\frac{m(\alpha-1)}{\alpha}}(\alpha p - \sqrt{(p^2-1)})^{\frac{-m(\alpha+1)}{\alpha}}\,dp}{gk^m p^{2m}(p - \sqrt{(p^2-1)})^{\frac{m(\alpha-1)}{\alpha}}(\alpha p - \sqrt{(p^2-1)})^{\frac{-m(\alpha+1)}{\alpha}}}.$$

Corre

COROLLARIUM 2

a sumatur numerus negativus, curva ubique secundum MR, ri oppositam, aequabiliter premetur. Hoc ergo casu curva va deorsum, quia vi centrifuga contraria atque maior esse normalis, cuius directio semper in MN est sita.

COROLLARIUM 3

0, tum curva prodibit, quae nullam omnino pressionem a Quae ergo curva est ea ipsa, quam corpus proiectum scribit.

COROLLARIUM 4

1 seu tota pressio $= g$, tum curva erit convexa deorsum quia vis normalis sola ubique est minor quam g nisi casu, s centrifuga cum ea conspirare debet ideoque radius osculi MN oppositam cadere.

COROLLARIUM 5

atur

$$k e^{2\alpha\cdot A\, \frac{1}{p}}\, u = 2mz,$$

$$d = \frac{e^{2\alpha\cdot A\, \frac{1}{p}}\, pdp}{P}.$$

solutio, quia in hac aequatione indeterminatae sunt a se s, habebitur, si ponatur $P = 0$. Hinc autem fit

$$gp - \alpha p\sqrt{(1+p^2)} - \sqrt{(1+p^2)} = 0$$

$$ap = \sqrt{(1+p^2)} \text{ sive } ads = dy.$$

$$as = y.$$

ecta angulum cum verticali AP constituens, cuius sinus est sinui toto. Hoc enim casu vis centrifuga evanescit et vis g.

705. Sit $\alpha = 1$ seu quaeratur curva, quae ubique vi ... casu integratio ipsius $\frac{gdp}{p}$ simplicior evadit; erit enim

$$e^{2mg\int\frac{dp}{p}} = p^{2m}(p - \sqrt{(p^2-1)})^{-2m} = \left(\frac{p}{p-\sqrt{(p^2-1)}}\right)^{2m} = (p^2 \cdot$$

Hanc ob rem erit

$$u = \frac{p}{gk^m} - \frac{\int(p^2 + p\sqrt{(p^2-1)})^{2m}dp}{gk^m(p^2+p\sqrt{(p^2-1)})^{2m}}.$$

Quae aequatio, quoties $2m$ est numerus integer, integration... sito enim

$$p^2 + p\sqrt{(p^2-1)} = \frac{r+1}{2}$$

erit

$$p = \frac{r+1}{2\sqrt{r}}$$

atque

$$u = \frac{r+1}{2gk^m\sqrt{r}} - \frac{1}{4gk^m(r+1)^{2m}}\int\frac{(r-1)(r+1)^{2m}d}{r\sqrt{r}}$$

Est autem hac positione

$$r = 2p^2 - 1 + 2p\sqrt{(p^2-1)} \quad \text{seu} \quad \sqrt{r} = p + \sqrt{(p^2}$$

Ut si fuerit $m = \frac{1}{2}$ seu resistentia celeritatibus proportiona...

$$u = \frac{r+1}{2g\sqrt{kr}} - \frac{1}{4g(r+1)\sqrt{k}}\int\frac{(r^2-1)dr}{r\sqrt{r}} = \frac{1}{2g\sqrt{k}}\left(\frac{r+1}{\sqrt{r}} - \frac{r^2+\beta\sqrt{r}+3}{3(r+1)\sqrt{r}}\right.$$

seu mutata constante β est

$$u = \frac{r\sqrt{r}+3\sqrt{r}+2\beta}{3g(r+1)\sqrt{k}}.$$

Posito autem loco r eius valore erit

$$u = \frac{p^2+1+p\sqrt{(p^2-1)}}{3gp\sqrt{k}} + \frac{\beta}{3g(p^2+p\sqrt{(p^2-1)})\sqrt{}}$$

$\beta = 0$; erit

$$u^{\frac{1}{m}} = u^2 = \frac{(p^2 + 1 + p\sqrt{(p^2-1)})^2}{9g^2kp^2}$$

propter

$$P = gp(p - \sqrt{(p^2-1)})\sqrt{(p^2-1)}$$

,

$$Pu^{\frac{1}{m}} = \frac{(p - \sqrt{(p^2-1)})(p^2 + 1 + p\sqrt{(p^2-1)})^2\sqrt{(p^2-1)}}{9gkp}$$

ue

$$x = \frac{2gk}{3p^2 - 1 - 3p\sqrt{(p^2-1)}} - 2gk\,l(3p^2 - 1 - 3p\sqrt{(p^2-1)}).$$

SCHOLION

706. Similis integratio formulae, cui u est aequalis, etiam succedit
$= -1$, quo casu prodit curva concava deorsum, in qua vis centrifuga
ria est et maior quam vis normalis; quippe excessus est $= g$. Eadem
prodit aequatio, quae pro casu $\alpha = 1$, nisi quod signum ipsius $\sqrt{(p^2}$
et immutari.

Quod ad reliquas quaestiones huc pertinentes attinet, in qu
e pressionum leges proponuntur, eae vel ad nimis prolixos calculos
unt vel iam sunt pertractatae. Vidimus enim curvas, in quibus pr
alis sit duplo maior quam vel sola vis centrifuga vel sola normalis,
chystochronas, atque curvas, in quibus alia obtinet ratio, supra qu
pertractavimus, cum curvas investigaremus, super quibus motus q
ime acceleraretur. Sequitur ergo, ut ad curvas inveniendas progredia
er quibus plures diversi descensus vel ascensus datas inter se ten
s, quae quaestiones plurimum difficultatis in se habent. Necesse e
ad huiusmodi problemata solvenda, ut celeritas corporis in singulis
sit exprimi per quantitates, quibus curvae natura determinatur. (
em cum non in quavis resistentiae hypothesi possit perfici, uti s
avimus, tales quaestiones tantum pro specialibus resistentiae hypothes
erunt proponi. Praecipue ergo ista tractatio ad resistentiam quad
ritatum proportionalem est accommodanda, quia hoc casu aequatio c
, qua celeritas determinatur, separationem variabilium admittit a
celeritas potest exhiberi. Tum etiam considerari potest resistentia,
uadratis celeritatum est proportionalis, cum pro hac hypothesi cele
dammodo cognoscatur. Denique quaecunque fuerit resistentiae lex

modo resistentia est valde parva, huiusmodi quaestiones
dent. In his vero problematibus vel ratio celeritatum,
scensibus super eadem curva acquiruntur, investigatur v
diversi descensus aut ascensus absolvuntur, ratio. Atqu
ex data vel temporum vel celeritatum variis descensibus
ipsae curvae sunt inveniendae.

PROPOSITIO 80

PROBLEMA

707. *In medio uniformi, quod resistit in duplicata rati*
potentia absoluta deorsum tendente comparare inter se cel
(Fig. 80), *quae in diversis descensibus corporis super curva*

SOLUTIO

Sit celeritas in A, quam uno descensu acquisivit,
celeritas in M debita altitudini v. Ponantur $AP = x$, A

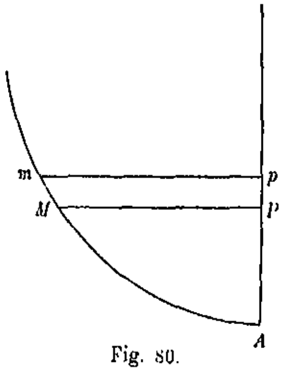


Fig. 80.

licitans in M, quae sit utcu
atque exponens resistentiae =

$$dv = -Pdx +$$

quae aequatio integrata dat

$$v = e^{\frac{x}{k}}(b - \int e^{\frac{-x}{k}}$$

integrali $\int e^{\frac{-x}{k}} Pdx$ ita accepto,
$x = 0$. Sit nunc M initium descensus, ubi est $v = 0$; inv
ex aequatione

$$b = \int e^{\frac{-x}{k}} Pdx.$$

Iam ponatur alius descensus fieri ex puncto proximo m
acquisita sit debita altitudini $b + db$. Erit ergo

$$b + db = \int e^{\frac{-x}{k}} Pdx$$

...ae omnium $e^{\frac{-s}{k}} Pdx$ ab A usque ad m; in aequatione vero priore ... significat summam omnium $e^{\frac{-s}{k}} Pdx$ ab A usque ad M tantum. Illa ...mma superat hanc summam ultimo elemento $e^{\frac{-s}{k}} Pdx$ existente $AM = s$ ... dx. Erit ergo

$$db = e^{\frac{-s}{k}} Pdx.$$

... aequatione datur relatio inter arcum MA descensu percursum et ...eritatem in puncto infimo A acquisitam. Q. E. I.

COROLLARIUM 1

Dato ergo arcu descensus $AM = s$ erit altitudo celeritati in A ...e debita

$$b = \int e^{\frac{-s}{k}} Pdx.$$

...unctum M et celeritas in A tanquam variabiles quantitates conside...erit aequatio inter eas

$$db = e^{\frac{-s}{k}} Pdx.$$

COROLLARIUM 2

Ex hac ergo aequatione, si proposita fuerit quaecunque ratio inter ...scensus et celeritates in puncto A acquisitas, invenietur aequatio pro ...M propositae conditioni satisfaciens.

COROLLARIUM 3

Si medium non fuerit uniforme, sed difforme utcunque existente ...onente $= q$, loco aequationis inventae prodibit ista aequatio

$$db = e^{-\int \frac{ds}{q}} Pdx,$$

...ilis est usus.

COROLLARIUM 4

711. Quia valor ipsius e est unitate maior, quippe 2,71828
$e^{-\int\frac{ds}{q}}$ seu $e^{\frac{-s}{k}}$ unitate minor et hanc ob rem $db < Pdx$. In vacu
$db = Pdx$.

SCHOLION 1

712. Simili modo res se habet in ascensu, quando corpus cel
tudini b debita ex A per arcum $AM = s$ ascendit. Tum enim er

$$db = e^{\frac{s}{k}} Pdx$$

vel in medio difformi

$$db = e^{\int\frac{ds}{q}} Pdx.$$

Quae formulae ex illis descensui inservientibus invenientur ponend
$+s$; qua substitutione semper descensus in ascensum transmut
apparet, quemadmodum pro descensu semper erat $db < Pdx$, it
ascensu semper $db > Pdx$, quia $e^{\frac{s}{k}}$ seu $e^{\int\frac{ds}{q}}$ est unitate maior.

COROLLARIUM 5

713. In medio ergo resistente neque pro ascensu neque pr
esse potest $b = \int Pdx$ vel $b = \alpha\int Pdx$; tum enim foret $e^{\frac{s}{k}} = \alpha$ seu
in qua aequatione nulla linea continetur.

COROLLARIUM 6

714. Neque etiam curva poterit inveniri, pro qua vel in d
in ascensu foret $b = \int Qdx$ denotante Q functionem quamcunque
et x, nisi Q ita sit comparata, ut $\frac{Q}{P}$ fiat $= 1$ positis s et $x = 0$.
$e^{\pm\int\frac{ds}{q}} P = Q$ et $e^{\pm\int\frac{ds}{q}}$ abit in 1 posito $s = 0$.

SCHOLION 2

Ratio huius est, quod posuimus s evanescere evanescente x; atque
rem aequatio

$$db = e^{\pm\int\frac{ds}{q}} Pdx$$

integrari, ut evanescat b posito $x = 0$. Si autem b ita detur, ut db
exprimatur, aequatio per dx dividi poterit. Quocirca ea ad hanc
on potest accommodari, nisi forte sponte aequatio hac proprietate
eat. Sin autem datus ipsius b valor talis fuerit, ut esset $db = Rds$
$\int Rds$ evanescente b facto $s = 0$, tum aequatio pro curva quaesita erit

$$Rds = e^{\pm\int\frac{ds}{q}} Pdx,$$

iper est pro curva reali, dummodo $\int Rds$ habeat valorem affirma-
odeatque $ds > dx$ seu

$$e^{\pm\int\frac{ds}{q}} P > R.$$

EXEMPLUM 1

Sit potentia sollicitans uniformis seu $P = g$ et medium resistens
requiraturque curva MA hanc habens proprietatem, ut corpus in
lescensibus ad A usque acquirat celeritates, quae sint in subduplicata
arcuum descensu percursorum. Erit ergo $\sqrt{b}$ ut $\sqrt{s}$ seu $b = \alpha s$;

$$\alpha ds = ge^{\frac{-s}{k}} dx \quad \text{seu} \quad \alpha e^{\frac{s}{k}} ds = gdx,$$

egralis est

$$\alpha k(e^{\frac{s}{k}} - 1) = gx$$

nstante, quo fiat $x = 0$ evanescente s. Habebitur ergo

$$e^{\frac{s}{k}} = \frac{\alpha k + gx}{\alpha k} \quad \text{atque} \quad \frac{s}{k} = l(\alpha k + gx) - l\alpha k.$$

erentiata dat

$$\frac{ds}{k} = \frac{gdx}{\alpha k + gx};$$

horizontali a puncto A deorsum distante intervallo $\frac{\alpha k}{g}$. Constru... curva hoc modo: super basi CE (Fig. 81) et filo $BC = k$ ... tractoria BA; tum ducatur h... DA a CE ad distantiam DC ... facto satisfaciet curvae portio BA ... Ponimus autem BC verticalem ... tum tractoriae summum; ex q... gitur α necessario minus esse deb... Si enim esset maior, foret ...

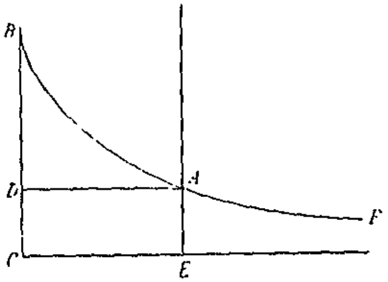


Fig. 81.

ideoque punctum A imaginarium. Sin autem esset $\alpha = g$, puncta... caderet adeoque nonnisi punctum satisfaceret. Si fuerit $\alpha = 0$, ... infinite distaret et corpus descendens omnem amitteret celerita... igitur debeat esse $\alpha < g$, erit $b < gs$.

EXEMPLUM 2

717. In superiori tam resistentiae quam potentiae sollicitanti... quaeratur curva AMF (Fig. 82), super qua omnes ascensus ex pun... ita se habeant, ut toti arcus ascensibus singulis absoluti sint quad... tatum initialium in A proportionales. Erit ergo ut ante $b = ...$ $db = \alpha ds$. Cum autem pro ascensibus sit $db = ge^{\frac{s}{k}} dx$, erit

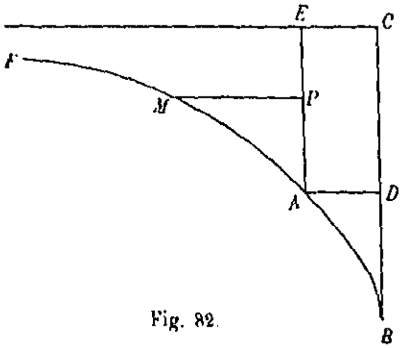


Fig. 82.

$$\alpha e^{-\frac{s}{k}} ds = g dx$$

atque integrando

$$\alpha k(1 - e^{-\frac{s}{k}}) = gx.$$

Hinc igitur habetur

$$e^{-\frac{s}{k}} = \frac{\alpha k - gx}{\alpha k}$$

atque

$$\frac{ds}{k} = \frac{g dx}{\alpha k - gx} \quad \text{seu} \quad \left(\frac{\alpha k}{g} - x\right)\frac{ds}{dx} = k.$$

Ex quo apparet curvam satisfacientem esse iterum tractoriam

orizontali CE filo longitudinis k constructam, sed deorsum spectante
uius cuspis sit in B existente $BC = k$. Sumatur autem $CD = \frac{\alpha k}{g}$; ductaq
orizontali DA erit A punctum, in quo ascensus omnes incipere deber
inc ergo quoque intelligitur α non posse esse maius quam g, quia ali
unctum A foret imaginarium. At si fuerit $\alpha = g$ seu $b = gs$, incidet A
eritque arcus quolibet ascensu percursus $= \frac{b}{g}$.

SCHOLION 3

718. Plura huiusmodi exempla, quia tam facile ex universali formu
ıventa resolvi possunt, hic praetermitto; neque etiam huiusmodi quaestion
ro aliis resistentiae hypothesibus, quibus solutio earum inveniri que
ffero, quoniam tales quaestiones neque iam sunt agitatae neque satis su
uriosae, ut earum solutiones requirantur. Ad digniora igitur progred
roblemata, in quibus curvae quaeruntur tautochronae, super quibus omn
el ascensus vel descensus aequalibus absolvantur temporibus.

PROPOSITIO 81

PROBLEMA

719. *In hypothesi potentiae uniformis deorsum directae et medio unifor
uod resistit in duplicata ratione celeritatum, invenire curvam tautochronam* .
Fig. 80, p. 352), *super qua omnes descensus ad punctum A usque absolvan
equalibus temporibus.*

SOLUTIO

Consideretur quicunque descensus, in quo celeritas, quam corpus
uncto infimo A acquirit, debita sit altitudini b. Ponantur $AP = x$, $AM =$
ltitudo celeritati in M debita $= v$ atque potentia sollicitans $= g$ et me
xponens $= k$, ita ut resistentia in M sit ad vim gravitatis ut $\frac{v}{k}$ ad
His positis erit

$$dv = -g dx + \frac{v ds}{k};$$

quae aequatio integrata dat

$$v = e^{\frac{s}{k}} \left(b - \int e^{\frac{-s}{k}} g dx\right)$$

integrali $\int e^{\frac{-s}{k}} g\,dx$ ita sumto, ut evanescat posito x vel $s =$
aequatione initium descensus invenitur ponendo $v = 0$ seu

$$\int e^{\frac{-s}{k}} g\,dx = b.$$

Tempus vero, quo arcus MA absolvitur, hinc erit

$$= \int \frac{ds}{e^{\frac{s}{2k}} \sqrt{\left(b - \int e^{\frac{-s}{k}} g\,dx\right)}},$$

ex quo prodibit totius descensus tempus, si post integratio

$$\int e^{\frac{-s}{k}} g\,dx = b.$$

Ponamus brevitatis gratia

$$\int e^{\frac{-s}{k}} g\,dx = t \quad \text{et} \quad \frac{ds}{e^{\frac{s}{2k}}} = du,$$

ita ut sit tempus totius descensus

$$= \int \frac{du}{\sqrt{(b - t)}}$$

posito post integrationem $t = b$. Quo nunc haec expressio
obtineat valorem, debebit

$$\int \frac{du}{\sqrt{(b - t)}}$$

esse functio nullius dimensionis ipsarum b et t, ut posito t
b evanescat. Hanc ob rem du debet esse functio dimidiae d
t tantum, quia u a b pendere non potest. Fieri ergo neces

$$du = \frac{\alpha\,dt}{\sqrt{t}}$$

existente α quantitate constante b non continente. Hoc po
unius descensus

$$= \alpha \int \frac{dt}{\sqrt{(bt - tt)}}$$

posito post integrationem $t = b$. Vel posita ratione diametr

ompus unius descensus $= \alpha\pi$; qui valor perpetuo idem manet, nque b seu descensus initium mutetur. Curva ergo tautochrona terminabitur ex hac aequatione

$$du = \frac{\alpha dt}{\sqrt{t}} = \frac{ds}{e^{\frac{s}{2k}}},$$

ralis est

$$2\alpha\sqrt{t} = 2k\left(1 - e^{\frac{-s}{2k}}\right) \quad \text{seu} \quad t = \frac{k^2}{\alpha^2}\left(1 - e^{\frac{-s}{2k}}\right)^2$$

et constante, quae faciat t evanescere posito $s = 0$. Cum autem sit

$$t = \int e^{\frac{-s}{k}} g dx,$$

$$dt = e^{\frac{-s}{k}} g dx = \frac{k}{\alpha^2}\left(1 - e^{\frac{-s}{2k}}\right) e^{\frac{-s}{2k}} ds.$$

$$\alpha^2 g = a \quad \text{seu} \quad \alpha = \sqrt{\frac{a}{g}};$$

$$a dx = k\left(e^{\frac{s}{2k}} - 1\right) ds,$$

alis est

$$ax = 2k^2\left(e^{\frac{s}{2k}} - 1\right) - ks;$$

n aequationes, quia variabiles s et x a se invicem sunt separatae, construendam sufficiunt. Sin autem aequatio ab exponentialibus eretur, quia ex altera aequatione est

$$k\left(e^{\frac{s}{2k}} - 1\right) = \frac{ax + ks}{2k},$$

ore in altera substituto

$$axds + ksds = 2akdx.$$

COROLLARIUM 1

720. Quia est $\alpha = \sqrt{\frac{a}{g}}$, erit tempus unius descensus =
autem et gravitate = 1 est tempus descensus penduli f

$$= \frac{\pi\sqrt{2f}}{2}$$

(§ 166). Quare longitudo penduli isochroni in vacuo est =

COROLLARIUM 2

721. Si igitur fuerit $\frac{2a}{g} = 3166$ part. millesimarum pe
descensus absolvetur dimidio minuto secundo; hoc ergo eveni
scrup. pedis Rhen.

COROLLARIUM 3

722. Altitudo celeritati in M debita seu v est

$$= e^{\frac{s}{k}}\left(b - \int e^{\frac{-s}{k}} y\,dx\right) = e^{\frac{s}{k}}(b - t)$$

atque ob

$$t = \frac{gk^2\left(1 - e^{\frac{-s}{2k}}\right)^2}{a}$$

erit

$$v = e^{\frac{s}{k}}\left(b - \frac{gk^2}{a}\left(1 - e^{\frac{-s}{2k}}\right)^2\right) = \frac{abe^{\frac{s}{k}} - gk^2\left(e^{\frac{s}{2k}} - 1\right.}{a}$$

COROLLARIUM 4

723. Posito $v = 0$ prodibit totus arcus descensus ex h

$$ab = gk^2\left(1 - e^{\frac{-s}{2k}}\right)^2.$$

Si ergo arcus descensus ponatur $= f$, erit

$$ab = gk^2\left(1 - e^{\frac{-f}{2k}}\right)^2.$$

Quare dato arcu descensus f erit

$$v = \frac{gk^2 e^{\frac{s}{k}}}{a}\left(\left(1 - e^{\frac{-f}{2k}}\right)^2 - \left(1 - e^{\frac{-s}{2k}}\right)^2\right)$$

COROLLARIUM 5

Aequatio pro curva haec

$$ax = 2k^2\left(e^{\frac{s}{2k}} - 1\right) - ks$$

n exponentiali $e^{\frac{s}{2k}}$ convertendo, quae est

$$1 + \frac{s}{2k} + \frac{s^2}{1\cdot 2\cdot 4k^2} + \frac{s^3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 8k^3} + \text{etc.},$$

hanc

$$ax = \frac{s^2}{1\cdot 2\cdot 2} + \frac{s^3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4k} + \frac{s^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 8k^2} + \text{etc.}$$

$$2ax = \frac{s^2}{1\cdot 2} + \frac{s^3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 2k} + \frac{s^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 4k^2} + \text{etc.}$$

SCHOLION 1

Notari hic convenit hanc curvam simili aequatione exprimi, qua achystochrona ascensui inserviens exprimebatur; ibi enim erat

$$at = \frac{z^2}{1\cdot 2} + \frac{z^3}{1\cdot 2\cdot 3k} + \frac{z^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4k^2} + \text{etc.}$$

quae aequatio ab hac nostra pro tautochrona inventa in hoc tantum uod hic sit $2a$, quod ibi erat a, atque exponens resistentiae brachy-ne duplo maior est exponente resistentiae pro tautochrona. Curva chystochrona quoque ad tautochronismum producendum accommodari rcu ascensus descensui tributo in medio resistente, cuius exponens est inor.

COROLLARIUM 6

Ad inveniendam continuationem curvae MA ultra A poni debet s m, quo facto habebitur

$$ax = 2k^2\left(e^{\frac{-s}{2k}} - 1\right) + ks$$

$$2ax = \frac{s^2}{1\cdot 2} - \frac{s^3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 2k} + \frac{s^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 4k^2} - \text{etc.}$$

Quae eadem aequatio prodiisset, si k negativum fecissemus.
negativo descensus mutatur in ascensum; quocirca curva MA
mutata ascensui inserviet atque super ea omnes ascensus ee
tempore, scilicet $\pi\sqrt{\frac{a}{g}}$.

COROLLARIUM 7

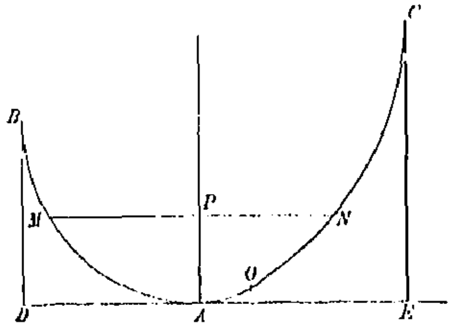


Fig. 83

727. Eadem ergo
$BMANC$ (Fig. 83) erit t
pro descensu quam pro as
super arcu BMA omnes
tempore absolvuntur atque
omnes ascensus. Quare
oscillationes, quae in arcu
erunt inter se isochronae
unius semioscillationis er

COROLLARIUM 8

728. Si resistentia evanescit, quo casu k fit ∞, curva ha
abire debet, quae est curva tautochrona in vacuo. Hoc ipsu
seriem expressa indicat; fit enim $2ax = \frac{s^2}{1\cdot 2}$ seu $4ax = s^2$, aequa

COROLLARIUM 9

729. Curva ergo $BMANC$ prout cycloïs habebit cuspid
B et C, ad quas inveniendas ponatur $dx = ds$, eritque pro a

$$a = k\left(e^{\frac{s}{2k}} - 1\right) \quad \text{seu} \quad s = 2kl\frac{a+k}{k} = AMB;$$

atque eius altitudo BD erit

$$= 2k - \frac{2k^2}{a}\, l\frac{a+k}{k}.$$

Pro arcu ascensus vero ANC erit

$$ANC = 2kl\frac{k}{k-a} \quad \text{et} \quad CE = \frac{2k^2}{a}\, l\frac{k}{k-a} - 2k.$$

er series erit

$$BD = a - \frac{2a^2}{3k} + \frac{2a^3}{4k^3} - \frac{2a^4}{5k^3} + \text{etc.}$$

$$CE = a + \frac{2a^2}{3k} + \frac{2a^3}{4k^2} + \frac{2a^4}{5k^3} + \text{etc.}$$

COROLLARIUM 10

30. Ex his perspicitur cuspidem C arcus ascensus elevatiorem esse
A arcus descensus. Atque arcus ANC cuspis in infinitum abit, si
et si $a > k$, cuspis C erit imaginaria. Ceterum ex aequatione patet
D quam CE esse diametros curvae inventae.

COROLLARIUM 11

31. Si corpus in dimidia oscillatione habuerit celeritatem altitudini b
n, erit arcus descensus

$$= 2kl\frac{k\sqrt{g}}{k\sqrt{g} - \sqrt{ab}}$$

seu per seriem

$$= \frac{2\sqrt{ab}}{\sqrt{g}} + \frac{2ab}{2gk} + \frac{2ab\sqrt{ab}}{3gk^2\sqrt{g}} + \text{etc.}$$

sequens arcus ascensus

$$= 2kl\frac{k\sqrt{g} + \sqrt{ab}}{k\sqrt{g}} = \frac{2\sqrt{ab}}{2g} - \frac{2ab}{2gk} + \frac{2ab\sqrt{ab}}{3gk^2\sqrt{g}} - \text{etc.}$$

COROLLARIUM 12

732. Si ergo descensus fiat ex puncto B, ita ut arcus descensus sit

$$= AMB = 2kl\frac{a+k}{k},$$

$$b = \frac{gak^2}{(a+k)^2};$$

ntis vero ascensus arcus erit

$$= 2kl\frac{2a+k}{a+k}.$$

COROLLARIUM 13

733. Ex aequatione pro hac curva apparet curvam in
turam esse tangentem horizontalem. Cum porro posito ds
osculi in M sit

$$= \frac{dsdy}{ddx} = \frac{ds\sqrt{(ds^2 - dx^2)}}{ddx},$$

quia est [§ 719]

$$dx = \frac{k}{a}\left(e^{\frac{s}{2k}} - 1\right)ds,$$

erit

$$ddx = \frac{1}{2a} e^{\frac{s}{2k}} ds^2$$

et

$$\sqrt{(ds^2 - dx^2)} = ds\sqrt{\left(1 - \frac{k^2}{a^2}\left(e^{\frac{s}{2k}} - 1\right)^2\right)};$$

erit radius osculi in M

$$= \frac{\sqrt{\left(4a^2 - 4k^2\left(e^{\frac{s}{2k}} - 1\right)^2\right)}}{e^{\frac{s}{2k}}}.$$

Posito ergo $s = 0$ erit radius osculi in puncto infimo A =
et C radius osculi evanescit.

COROLLARIUM 14

734. Radius osculi non est maximus in puncto infi
methodum maximorum maximus invenitur in arcu asco
puncto O existente

$$AO = 2kl\frac{k^2}{k^2 - a^2}.$$

In hoc enim puncto est radius osculi

$$= \frac{2ak}{\sqrt{(k^2 - a^2)}}.$$

Ex quo concluditur, nisi sit $k > a$, curvaturam curvae
diminui neque punctum O usquam existere.

SCHOLION 2

oc igitur problemate duas invenimus curvas, super quarum altera nsus, super altera vero omnes ascensus aequalibus absolvuntur temque cum super tota curva BAC omnes itus seu semioscillationes peragantur temporibus, si quidem in curvae portione BA incicurva ad oscillationes in fluido isochronas faciendas esset idonea, litus quoque inter se essent isochroni, de quo vero non constat. in fluidis praeter resistentiam quadratis celeritatum proportioinsuper observatur, quam momentis temporum proportionalem tem esse probabile est, etiam coniunctim cum ista resistentia m determinare operae pretium est; quod vero facile ex praecepotest. Sit enim resistentia constans $= h$; erit pro descensu

$$dv = -g dx + h ds + \frac{v ds}{k}.$$

priore operatione tantum loco gdx ubique $gdx - hds$ substituarona satisfaciens simili modo obtinebitur; pro descensu scilicet curva

$$ax = \left(\frac{ah}{g} - k\right) s + 2k^2\left(e^{\frac{s}{2k}} - 1\right)$$

scensu vero haec

$$ax = \left(k - \frac{ah}{g}\right) s + 2k^2\left(e^{\frac{-s}{2k}} - 1\right);$$

quoque cum priore eandem curvam continuam constituit; abit in alteram ponendo s negativum. Notandum hic est, si fuerit curvam tautochronam tractoriam BAF (Fig. 82, p. 356) asymtotam orizontalem CE, quae a puncto A distet intervallo $AE = \frac{2k^2}{a}$. longitudo, quo haec tractoria describitur, est $= 2k$.

utem super huiusmodi curva tangentem horizontalem nusquam nioscillatio absolvi possit atque alicubi punctum aequilibrii A rum non est, cum, ut supra iam observavimus, in tali resistentiae orpus in loco subsistere queat declivi. His autem casibus, quibus A descendere pergit, nulli reditus atque ideo nullae oscillationes int, quia corpus, quanquam super plano declivi ad quietem perst, tamen super eo ascendere nequit; in quovis enim curvae F puncto corpus in quiete perseverare potest.

SCHOLION 3

736. Non multo difficilior fit problematis solutio, si potenti tendens non constans, sed variabilis utcunque P atque exponens etiam variabilis q ponatur. Habebitur enim pro elemento te descensu

$$\frac{ds}{e^{\frac{1}{2}\int\frac{ds}{q}}\sqrt{\left(b-\int e^{-\int\frac{ds}{q}}Pdx\right)}}$$

Si nunc ut ante [§ 719] ponatur

$$\int e^{-\int\frac{ds}{q}}Pdx = t \quad \text{et} \quad \frac{ds}{e^{\frac{1}{2}\int\frac{ds}{q}}} = du,$$

debebit quoque esse

$$du = \frac{adt}{\sqrt{t}} \quad \text{seu} \quad t = \frac{a^2dt^2}{du^2} = \frac{a^2P^2dx^2}{e^{\int\frac{ds}{q}}ds^2}.$$

Quae aequatio denuo differentiata posito ds constante et loco dt substituto dabit

$$\frac{qds^2}{2a^2} = Pqddx + qdPdx - \frac{1}{2}Pdxds$$ [1]

pro curva descensus isochronos habente. Huiusque curvae contir ascensibus inserviet.

SCHOLION 4

737. Tautochronam hanc in hypothesi resistentiae quadratis proportionalis primus ego dedi in Comment. tomo IV, ubi ead sum usus methodo.[2] Deinceps vero etiam Cel. Ioh. BERNOULL litteras significavit se quoque in eadem resistentiae hypothesi i

---

1) Editio princeps: $\frac{qds^2}{2\alpha^2} = Pqddx + qdPdx - 2Pdxds.$ Correxit P. S

2) L. EULERI Commentatio 13 (indicis ENESTROEMIANI): *Curva tautochrona sistentiam faciente secundum quadrata celeritatum*, Comment. acad. sc. Petrop. 4 p. 67; *LEONHARDI EULERI Opera omnia*, series II, vol. 4. P. St.

ronam repperisse[1]); cuius methodus extat in Comm. Acad. Paris. A. 1730
aliis vero resistentiae hypothesibus excepta ea, quae ipsis celeritatibus
oportionalis, nemo adhuc, quantum mihi constat, tautochronas determinav
uod enim ad eas curvas attinet, quas in Act. Lips. A. 1726 tautochronaru
omine dedi[3]), eae quaesito non satisfaciunt, uti Cel. HERMANNUS, qui primu
easdem inciderat[4]), atque ego postea monstravimus.[5]) Difficultas aute
ethodi huius tautochronas inveniendi in hoc consistit, quod in aliis re
entiae hypothesibus celeritas non possit universaliter ex aequatione can
ca determinari. Quomodo vero nihilominus pro aliis resistentiis tautochron
vestigari queant, ex sequente propositione colligi poterit; in qua pro med
rissimis in quacunque celeritatum ratione multiplicata resistentibus taut
ronae inveniendae proponuntur.

PROPOSITIO 82

PROBLEMA

738. *In medio rarissimo, quod resistit in quacunque multiplicata ratione ce tatum, et hypothesi potentiae uniformis deorsum tendentis determinare curv utochronam AM* (Fig. 80, p. 352), *super qua vel omnes descensus vel ascen equalibus absolvantur temporibus.*

SOLUTIO

Positis abscissa $AP = x$ et arcu $AM = s$ sit totus arcus descensu aliq escriptus $= f$. Potentia sollicitans deorsum ponatur $= g$, altitudo celerit

1) Vide litteras ab IOH. BERNOULLI 27. Dec. 1729 ad LEONHARDUM EULERUM datas, q . ENESTROEM edidit Biblioth. Mathem. 4_3, 1903, p. 378. P. St.

2) IOH. BERNOULLI, *Méthode pour trouver les tautochrones, dans les milieux résistans co quarré des vitesses*, Mém. de l'acad. d. sc. de Paris 1730, p. 78; *Opera omnia*, Tom. ausannae et Genevae 1742, p. 173. P. St.

3) L. EULERI Commentatio 1 (indicis ENESTROEMIANI): *Constructio linearum isochrona n medio quocunque resistente*, Acta erud. 1726, p. 361; LEONHARDI EULERI *Opera omnia*, serie ol. 4. P. St.

4) IAC. HERMANN, *Theoria generalis motuum, qui nascuntur a potentiis quibusvis in cor ndesinenter agentibus*, Comment. acad. sc. Petrop. 2 (1727), 1729, p. 139; vide praec . 158. P. St.

5) Vide notam 2 p. 366. P. St.

in M debita sit $= v$, exponens resistentiae $= k$ atque $\frac{v^m}{k^m}$, ubi k est quantitas valde magna, ita ut fractiones, k plurium quam m dimensionum habent, pro evanesc
His positis erit ex natura descensus

$$dv = -g dx + \frac{v^m ds}{k^m}.$$

Iam si resistentia prorsus abesset, curva quaesita esset
tio est

$$gx = \alpha s^2;$$

quia autem medium est rarissimum, curva quaesita n
differet; ponatur igitur aequatio pro curva quaesita ha

$$gx = \alpha s^2 + \frac{\beta s^n}{k^m}.$$

Quia vero est

$$dv = -g dx + \frac{v^m ds}{k^m},$$

propter terminum $\frac{v^m ds}{k^m}$ valde parvum erit proxime

$$v = C - gx = C - \alpha s^2 - \frac{\beta s^n}{k^m},$$

ubi constans C ex hoc determinatur, quod, si fit s
circa erit

$$v = \alpha(f^2 - s^2) + \frac{\beta}{k^m}(f^n - s^n) \text{ quam pro}$$

Ponatur ergo

$$v = \alpha(f^2 - s^2) + \frac{\beta}{k^m}(f^n - s^n) + Q;$$

erit

$$dv = -2\alpha s ds - \frac{n\beta s^{n-1} ds}{k^m} + dQ = -gd$$

$$= -2\alpha s ds - \frac{n\beta s^{n-1} ds}{k^m} + \frac{\alpha^m (f^2 - s^2)}{k^m}$$

neglectis reliquis terminis, qui pro v^m poni deberent
quam m in denominatore habet dimensiones. Ex his

$$Q = \frac{\alpha^m}{k^m} \int (f^2 - s^2)^m ds$$

ioc ita accepto, ut evanescat posito $s = f$. Erit ergo

$$v = \alpha(f^2 - s^2) + \frac{\beta}{k^m}(f^n - s^n) + \frac{\alpha^m}{k^m}\int(f^2 - s^2)^m ds$$

;

$$\frac{1}{\sqrt{v}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha(f^2 - s^2)}} - \frac{\beta(f^n - s^n) + \alpha^m\int(f^2 - s^2)^m ds}{2\alpha^{\frac{3}{2}}k^m(ff - ss)^{\frac{3}{2}}}$$

iterum terminis sequentibus ob memoratam rationem. Hinc nunc empus

$$\frac{ds}{\sqrt{v}} = \int\frac{ds}{\sqrt{\alpha(f^2 - s^2)}} - \frac{\beta}{2\alpha^{\frac{3}{2}}k^m}\int\frac{ds(f^n - s^n)}{(ff - ss)^{\frac{3}{2}}} - \frac{\alpha^m}{2\alpha^{\frac{3}{2}}k^m}\int\frac{ds\int(f^2 - s^2)^m ds}{(ff - ss)^{\frac{3}{2}}},$$

integratum, ut evanescat posito $s = 0$, dabit tempus, quo corpus s arcum $MA = s$ absolvit. Totum ergo descensus tempus per btinebitur, si post integrationem ponatur $s = f$; quod tempus debet ans seu ita comparatum, ut non pendeat ab f. Primus autem erminus

$$\int\frac{ds}{\sqrt{\alpha(f^2 - s^2)}}$$

st integrationem $s = f$ iam dat huiusmodi expressionem, in qua ius inest f; prodit enim $\frac{\pi}{2\sqrt{\alpha}}$. Quamobrem si duo reliqui termini comparati, ut, postquam positum est $s = f$, sese destruant, quaesito sfactum; haberetur enim pro integro descensus tempore haec ex- $\frac{\pi}{2\sqrt{\alpha}}$, quae est constans. Debebit ergo esse

$$\beta\int\frac{ds(f^n - s^n)}{(ff - ss)^{\frac{3}{2}}} = -\alpha^m\int\frac{ds\int(f^2 - s^2)^m ds}{(ff - ss)^{\frac{3}{2}}}$$

st integrationem $s = f$. Dat autem

$$\int\frac{ds(f^n - s^n)}{(ff - ss)^{\frac{3}{2}}}$$

$= f$ multiplum potestatis ipsius f, cuius exponens est $n - 2$, atque ntegrale

$$\int\frac{ds\int(f^2 - s^2)^m ds}{(ff - ss)^{\frac{3}{2}}}$$

posito $s = f$ dat multiplum potestatis ipsius f,
Fiat igitur $n = 2m + 1$ atque β ita sumatur, u
f, quarum utriusque exponens erit $2m - 1$, ses
pareat, quales coefficientes habiturae sint istae i
simplicioribus concludemus. Integratis igitur s
evanescant posito $s = 0$, tumque facto $s = f$ rep

$$\int \frac{(f-s)\,ds}{(ff-ss)^{\frac{3}{2}}} = f^{-1} \quad \text{atque} \quad \int \frac{(f^3 - s^3)\,ds}{(ff-ss)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{1} f^1$$

hincque erit generaliter

$$\int \frac{(f^{2m+1} - s^{2m+1})\,ds}{(ff-ss)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2}$$

unde erit

$$\beta \int \frac{ds(f^n - s^n)}{(ff-ss)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2m}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2m -}$$

Alterius termini coefficiens ex eadem analogia i
tione ita instituta, ut integrale evanescat posito

$$\int (f^2 - s^2)^m ds = -f^{2m}(f-s) + \frac{m}{1 \cdot 3} f^{2m-2}(f^3 -$$

$$+ \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7} f^{2m-6}(f^7 -$$

Haec igitur series in

$$-\frac{\alpha^m ds}{(ff-ss)^{\frac{3}{2}}}$$

ducta et integrata atque tum posito $s = f$ dabit

$$\alpha^m f^{2m-1}\Big(1 - \frac{2m}{1 \cdot 3} + \frac{4m(m-1)}{1 \cdot 3 \cdot 5} - \frac{8m(m-1)(m}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}$$

His igitur duobus valoribus inter se aequatis p

$$\beta = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2m -}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdots 2m(2m}$$

quo valore loco β substituto habebitur pro cu

pertinente, posito $\frac{1}{a}$ loco a homogeneitatis ergo, sequens aequatio

$$gx = \frac{s^2}{a} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2m-1) s^{2m+1}}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2m(2m+1) a^m k^m}.$$

Vel si ex x desideretur s, hinc oritur ista aequatio

$$s = \sqrt{gax} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2m-1) g^m a x^m}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2m(2m+1) 2 k^m}.$$

Atque tempus uniuscuiusque descensus super hac curva erit $= \frac{\pi \sqrt{a}}{2}$ s[eu] longitudo penduli in vacuo a gravitate naturali $= 1$ sollicitati eodem temp[ore] descensus absolventis erit $= \frac{a}{2}$. Eadem aequatio pro curva tautochrona m[u]tatur in aequationem pro curva, super qua omnes ascensus aequalibus te[m]poribus, tempore scilicet $\frac{\pi \sqrt{a}}{2}$, absolvuntur, si loco k^m scribatur $-k^m$. Q. E[. I.]

COROLLARIUM 1

739. Si $2m + 1 > 2$ seu $m > \frac{1}{2}$, curvae radius osculi in puncto A ide[m e]rit qui pro aequatione $gx = \frac{s^2}{a}$, scilicet $\frac{ga}{2}$. In his ergo casibus corp[us m]inimum descensum absolvit eodem tempore quo in vacuo; seu descens[us s]uper infima curvae portiuncula infinite parva idem erit in vacuo et [in m]edio resistente, si modo $m > \frac{1}{2}$.

COROLLARIUM 2

740. Si $m = \frac{1}{2}$, in utroque termino s habebit duas dimensiones. Qua[re ra]dius osculi in A non amplius erit $\frac{ga}{2}$, sed eo erit minor. In hoc er[go m]edio, quod in ratione celeritatum resistit, tempus descensus minimi p[er ar]culum circularem maius erit quam in vacuo hocque in data ratione.

COROLLARIUM 3

741. Si m fuerit $< \frac{1}{2}$, verum tamen > 0, radius osculi in A erit infini[te p]arvus; super hac ergo curva in vacuo minimus descensus absolveretur tem[po]re infinite parvo, cum in medio resistente finito tempore perficiatur.

SCHOLION 1

742. Quod ad hunc casum $m < \frac{1}{2}$ attinet, hoc,
aequatione sequitur, quam in medio rarissimo
ponimus. In casu autem, quo $m < \frac{1}{2}$, tres termini
sistit, etiamsi medium sit rarissimum, non satisfa
quibus gx aequatur, considerari debent tanquam
convergentis, in qua sequentes prae primis evan
huiusmodi habebit formam

$$gx = \frac{s^2}{a} + \frac{As^{2m+1}}{a^m k^m} + \frac{Bs^{4m}}{a^{2m-1}k^{2m}} + \frac{Cs^{6\ldots}}{a^{3m-\ldots}}$$

in qua exponentes ipsius s in progressione arithmet
forma partim ex analogia, partim ea ipsa ratione,
inveniendum usi sumus, colligi potest. Ex hac iam
puncto infimo A conditionem, si $m < \frac{1}{2}$, ex duobu
non posse, quantumvis k sit magnum. Quia enim
crescunt, in sequentibus terminis s tandem in den
que posito $s = 0$ fiet $x = \infty$, ex quo apparet cur
terminari neque radium osculi in hoc loco posse
non habet locum, si exponentes ipsius s crescunt.

SCHOLION 2

743. Hinc igitur patet modus curvam tautoc
cunque celeritatum ratione multiplicata resistente
non fuerit rarissimum. Cum enim aequatio pro ta

$$gx = \frac{s^2}{a} + \frac{As^{2m+1}}{a^m k^m} + \frac{Bs^{4m}}{a^{2m-1}k^{2m}} + \frac{Cs^{6\ldots}}{a^{3m-\ldots}}$$

quemadmodum ex conditione tautochronismi valo
minavimus, eodem modo etiam coefficientes reliqu
definiri. At propter tantopere compositas formul
insuperabilis, qui autem forte sublevabitur, si q
cientem B vel ad summum duos B et C deter
quoniam sequentes ex analogia concludi possent.

u, quo $m=1$, cognita sit, quippe ex superioribus (§ 724) habemus

$$gx = \frac{s^2}{a} + \frac{s^3}{6ak} + \frac{s^4}{48ak^2} + \frac{s^5}{480ak^3} + \text{etc.},$$

ad generalem inveniendam non parum subsidii afferet. Terminus niri debet ex sequente aequatione

$$\frac{{}^{m})ds}{{})^{\frac{3}{2}}} = \frac{3}{4} A^2 \int \frac{(f^{2m+1}-s^{2m+1})^2 ds}{(ff-ss)^{\frac{5}{2}}} + \frac{3}{2} A \int \frac{ds(f^{2m+1}-s^{2m+1}) \int ds(ff-ss)^m}{(ff-ss)^{\frac{5}{2}}}$$

$$\int \frac{ds(\int ds(f^2-s^2)^m)^2}{(ff-ss)^{\frac{5}{2}}} - mA \int \frac{ds \int ds(ff-ss)^{m-1}(f^{2m+1}-s^{2m+1})}{(ff-ss)^{\frac{3}{2}}}$$

$$- m \int \frac{ds \int ds\,(ff-ss)^{m-1} \int ds(ff-ss)^m}{(ff-ss)^{\frac{3}{2}}},$$

tionis integralia ita sunt sumenda, ut evanescant posito $s=f$, oni debet $s=0$; atque tum valor ipsius B invenietur. Coefficiens cognitus est; invenimus enim

$$A = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2m-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2m(2m+1)}.$$

uo $m=1$, superiorem aequationem evolvi invenique $B=\frac{1}{48}$ exi-, id quod egregie congruit. Si autem valores coefficientium in notescerent, tum haberetur quidem aequatio serie infinita constans ona quaesita; quae autem, si eius lex cognita fuerit, per methoeries summandi[1]) in aequationem terminorum numero finito consformari poterit. Atque hanc propemodum unicam et tutissimam odum, cuius ope tautochronae in aliis resistentiae hypothesibus nt.

COROLLARIUM 4

igitur aequatio

$$gx = \frac{s^2}{a} + \frac{As^{2m+1}}{a^m k^m} + \frac{Bs^{4m}}{a^{2m-1}k^{2m}} + \text{etc.}$$

LERI Commentatio 25 (indicis ENESTROEMIANI): *Methodus generalis summandi pro-* ment. acad. sc. Petrop. 6 (1732/3), 1738, p. 68; *LEONHARDI EULERI Opera* vol. 14. P. St.

exprimat tautochronam descensuum, ascensus tautochronos

$$yx = \frac{s^2}{a} - \frac{As^{3m+1}}{a^m k^m} + \frac{Bs^{4m}}{a^{2m-1}k^{2m}} - \frac{Cs^{6m-1}}{a^{3m-2}k^{3m}} + \text{c}$$

quae oritur ponendo k^m negativum.

COROLLARIUM 5

745. Perspicitur hinc, quoties m fuerit numerus int chronam ascensibus inservientem ANC (Fig. 83, p. 362) ess chronae descensuum BMA. Eadem enim aequatio oritur, matur negativum.

COROLLARIUM 6

746. Praeterea intelligitur curvam ANC, super qua on tempore absolvuntur quo descensus super curva BMA, quam BMA et cuspidem C altius habere positam, quema quod in duplicata celeritatum ratione resistit.

COROLLARIUM 7

747. In medio, quod in simplici ratione celeritatum re s exponentes fiunt $=2$; ex quo sequitur tam tautochronar ascensuum esse semicycloides. Ea vero pro ascensu, quia coefficientem quam pro descensu, maiore circulo erit geni pora ascensuum aequalia esse debeant temporibus descens eadem cyclois continua semioscillationes quoquo producit suum vero tempora erunt minora quam tempora descensu

SCHOLION 3

748. Si m est numerus integer, facile ex data forr valor definiri. Namque si $m=1$, erit $A = \frac{1}{6}$, si $m=2$, porro. At si m non est numerus integer, difficilius est v series enim valorum ipsius A debet interpolari. Pro quarum denominator est 2, valor ipsius A per quadrat definiri. Posito enim π pro perimetro circuli, cuius diam sequitur:

$$\begin{array}{c|ccccc} m & \frac{1}{2}, & \frac{3}{2}, & \frac{5}{2}, & \frac{7}{2} & \text{e} \\ A & \frac{1}{\pi}, & \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2\pi}, & \frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}\cdot\frac{1}{3\pi}, & \frac{2\cdot 4\cdot 6}{3\cdot 5\cdot 7}\cdot\frac{1}{4\pi} & \text{e} \end{array}$$

t, si fuerit $m = \frac{2n+1}{2}$, fore

$$A = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n+1)} \cdot \frac{1}{(n+1)\pi}$$

$$gx = \frac{s^2}{a} + \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n \cdot s^{2n+2}}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n+1)(n+1)\pi a^m k^m},$$

licet $m = \frac{2n+1}{2}$. Quaecumque autem m fuerit fractio, erit perpetuo

$$A = \frac{1}{(2m+1)^2 \int dz(1-z)^m}$$

ita accepto, ut evanescat posito $z = 0$, atque tum posito $z = 1$, m docui in Comment. A. 1730, in Dissertatione *De progressionibus us.*[1])

COROLLARIUM 8

nunc pro singulis mediis resistentibus rarissimis quaerantur descensuum, eae se habebunt, ut sequitur:

$m = 0$	$gx = \frac{s^2}{a} + s$
$m = \frac{1}{2}$	$gx = \frac{s^2}{a} + \frac{s^3}{\pi\sqrt{ak}}$
$m = 1$	$gx = \frac{s^2}{a} + \frac{s^3}{6ak}$
$m = \frac{3}{2}$	$gx = \frac{s^2}{a} + \frac{s^4}{3\pi ak\sqrt{ak}}$
$m = 2$	$gx = \frac{s^2}{a} + \frac{3s^5}{40a^2k^2}$
$m = \frac{5}{2}$	$gx = \frac{s^2}{a} + \frac{8s^6}{45\pi a^2k^2\sqrt{ak}}$
$m = 3$	$gx = \frac{s^2}{a} + \frac{5s^7}{112a^3k^3}$.

abuntur tautochronae ascensuum, si ultimi termini fiant negativi.

1) ...ERI Commentatio 19 (indicis ENESTROEMIANI): *De progressionibus transcendentibus, ...ini generales algebraice dari nequeunt*, Comment. acad. sc. Petrop. 5 (1730/1), ...EONHARDI EULERI *Opera omnia*, series I, vol. 14. P. St.

SCHOLION 4

750. Haec igitur sufficiant de tautochronis simplicibu
omnes descensus tantum vel omnes ascensus aequalibu
poribus. Praeter has autem curvas etiam aliae tantochr
pellari possunt, super quibus vel omnes semioscillation
omnes integrae oscillationes sint isochronae; quarum cu
etiam in vacuo est infinitus. Quod autem ad integras
haec quaestio resistentiae propria est; in vacuo enim om
inter se sunt aequales. Quia autem in his quaestionib
veniendae proponuntur, quarum altera ad ascensus, alter
tineat, antequam huiusmodi quaestiones pro tautochronis
faciliores propositiones circa binas curvas ascensum et d
praemittemus.

PROPOSITIO 83

PROBLEMA

751. *In hypothesi potentiae uniformis deorsum tendent*
quod resistit in duplicata ratione celeritatum, data curva M
alteram AN illi in
indolis, ut corpus p
MA super curva a
curva quaesita asc
AN, qui aequalis s

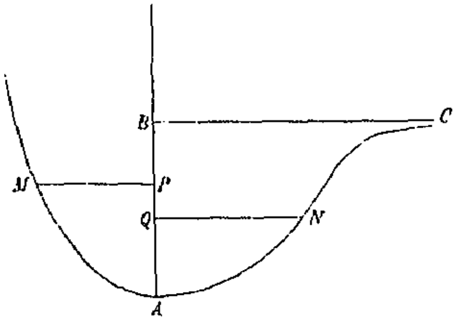


Fig. 84.

SOL

Positis potent
ponente resistentiae
quam ex descensu acquisivit quaque super curva quaesit
choat, debita altitudini b sit pro curva data abscissa AP
pro quaesita vero sit abscissa $AQ = t$ atque arcus $AN =$
altitudo celeritati corporis descendentis in M debita

$$= e^{\frac{s}{k}}\left(b - g\int e^{\frac{-s}{k}}dx\right)$$

citati corporis ascendentis in N debita

$$v = e^{\frac{-r}{k}}\left(b - g\int e^{\frac{r}{k}} dt\right).$$

cus descensus provenit ex hac aequatione

$$b = g\int e^{\frac{-s}{k}} dx,$$

cus ascensus ex hac aequatione

$$b = g\int e^{\frac{r}{k}} dt.$$

ur descensus et ascensus haec habebitur aequatio

$$\int e^{\frac{-s}{k}} dx = \int e^{\frac{r}{k}} dt$$

entialis

$$e^{\frac{-s}{k}} dx = e^{\frac{r}{k}} dt.$$

s ascensus aequalis esse debeat arcui descensus, ponatur $r = s$; bit ista aequatio

$$e^{\frac{-2s}{k}} dx = dt.$$

va MA data sit, dabitur aequatio inter s et x; ex qua, si alor per s et ds substituatur, prodibit aequatio inter t et s r propter $r = s$; quae determinabit naturam curvae quaesitae

COROLLARIUM 1

rvae datae MA portio infima exprimatur aequatione $x = \alpha s^n$, ne infima curvae AN haec aequatio

$$dt = \alpha n e^{\frac{-2s}{k}} s^{n-1} ds.$$

EXEMPLUM 1

760. Sit linea data recta verticalis; erit $x = s$. Pro cur
suum quaesita ANE (Fig. 85) existente $AQ = t$ et $AN = s$
aequatio

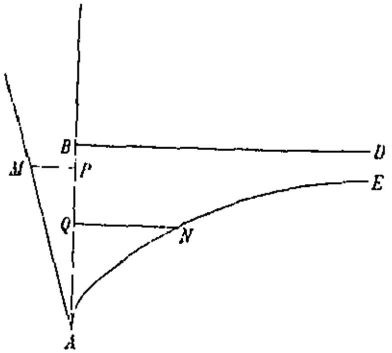


Fig. 85.

$$dt = e^{\frac{-2s}{k}} ds \quad \text{seu} \quad t =$$

Atque eliminata quantitat
erit

$$2tds = kds - kdt \quad \text{sive} \quad ($$

Ex qua aequatione persp
ANE esse tractoriam s
horizontali BD filo longitudinis $\frac{1}{2} k$ genitam. Quare altitudo
erit $= \frac{1}{2} k$. Si nunc haec ipsa tractoria ANE pro curva do
piatur, ei respondebit curva quaesita, cuius abscissa arcui s r
$= \int e^{\frac{-4s}{k}} ds$; quae ergo curva iterum erit tractoria asymtoton
habens, cuius asymtotos supra A elevata est intervallo $\frac{1}{4} k$,
fili aequatur. Seriei vero superioris omnes curvae erunt tr
tilis generantur, quorum longitudines constituunt hanc seriem $\frac{k}{0}$
Recta scilicet verticalis tanquam tractoria considerari potest
generans est $\frac{k}{0}$ seu infinitum. Ultima autem huius seriei tract
abit horizontalem per A ductam.

EXEMPLUM 2

761. Si linea descensuum data fuerit recta utcunque ad h
clinata MA (Fig. 85), ita ut sit $MA\,(s) : AP\,(x) = \alpha : 1$ seu α
bitur pro curva quaesita AN ista aequatio

$$\alpha dt = e^{\frac{-2s}{k}} ds,$$

cuius integralis est

$$\alpha t = \frac{k}{2}\left(1 - e^{\frac{-2s}{k}}\right).$$

ationibus coniunctis oritur

$$2\alpha t ds = k ds - \alpha k dt \quad \text{seu} \quad \frac{\left(\frac{k}{2\alpha} - t\right) ds}{dt} = \frac{k}{2}.$$

quoque est pro tractoria filo longitudinis $\frac{k}{2}$ super asymtoto genita existente $AB = \frac{k}{2\alpha}$; haecque tractoria per A transire equentes curvae omnes sunt quoque tractoriae ut in praece- quarum fila generantia sunt $\frac{k}{0}, \frac{k}{2}, \frac{k}{4}, \frac{k}{6}$ etc., earum vero puncto A distantiae tenent hanc progressionem $\frac{k}{0\alpha}, \frac{k}{2\alpha}, \frac{k}{4\alpha}$, cilicet omnes tractoriae cum axe verticali AB angulum con- m angulo PAM.

COROLLARIUM 8

oriarum harum ea, quae primam seu rectam MA praecedit, bit proprietatem, ut corpus super ea descendens posteaque ascendens aequalia spatia percurrat.

COROLLARIUM 9

urvam igitur descensuum CA ndam, cui respondeat recta in- uper asymtoto horizontali filo escribatur tractoria CA in eaque ta $Ab = \frac{k}{2\alpha}$ et ex A constituatur AM; eritque CA curva descen- ndet recta AM pro ascensibus.

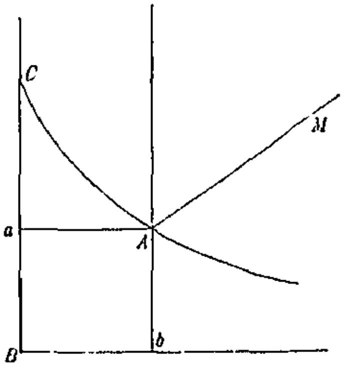


Fig. 86.

SCHOLION 2

ire potest hic casus instar exempli problematis inversi, quo scensuum curva descensuum requiritur.

EXEMPLUM 3

rva descensuum data cyclois MA (Fig. 84, p. 376), cuius natura sit expressa

$$2ax = s^2$$

seu circuli genitoris diameter $=\frac{a}{2}\cdot$ Erit ergo

$$dx=\frac{sds}{a},$$

unde pro curva altera ascensuum AN haec invenitur aequ

$$adt=e^{\frac{-2s}{k}}sds,$$

cuius integralis est

$$at=\frac{k^3}{4}\left(1-e^{\frac{-2s}{k}}\right)-\frac{k}{2}e^{\frac{-2s}{k}}s,$$

quae propter

$$e^{\frac{-2s}{k}}=\frac{adt}{sds}$$

abit in hanc

$$atsds=-\frac{ak^2dt}{4}+\frac{k^2sds}{4}-\frac{aksdt}{2}.$$

Haec curva in A, ut iam est dictum, tangentem ha
Habebit vero etiam asymtoton BC horizontalem; cuius al
tur, si s fiat $=\infty$. Fiet autem hoc casu $e^{\frac{-2s}{k}}=0$; quare
Ex hoc intelligitur curvam alicubi punctum flexus contr
quod inveniatur, si posito dt constante ponatur $dds=0$.
$1=\frac{2s}{k}$ seu $s=\frac{k}{2}\cdot$ Quare si sumatur arcus $AN=\frac{k}{2}$, erit
contrarii; cui respondet abscissa $AQ=\frac{k^3}{4a}-\frac{k^2}{2ae}$ seu BQ
erit semper $AB:BQ=e:2=2{,}71828:2$.

SCHOLION 3

766. Problema hoc propositum extat ab anonymo in A
eiusque solutionem dedit in Comment. Acad. Petrop. A. 17
alia usus methodo. Praeter hanc vero conditionem anc
mum requirit unam curvam continuam, cuius alter ramu
ascensibus inserviat, cuiusmodi curvae dantur innumerabil
propositione detegemus.

1) *Problema geometris propositum*, Acta erud. 1728, p. 523.

2) Dan. Bernoulli, *Theorema de motu curvilineo corporum, quae res*
tatis suae quadrato proportionalem, Comment. acad. sc. Petrop. 4 (1730

PROPOSITIO 84

PROBLEMA

...dem positis ut ante invenire curvam continuam MAN (Fig. 84, *...modi, ut in quavis semioscillatione, quae semper in arcu MA incipiat, ...a arcus descensus MA aequalis sit arcui ascensus sequentis AN.*

SOLUTIO

...tio haec a praecedente in hoc tantum differt, quod ibi data ... MA; hic vero ea quoque quaeri debeat ex hac conditione, quod ...va MA et AN unam eandemque curvam continuam constituere ...ntis igitur arcubus AM et AN aequalibus $= s$ et posita $AP = x$ ... t erit

$$dt = e^{\frac{-2s}{k}}\, dx.$$

... curva MAN debet esse continua, aequationem inter s et x ita ... comparatam, ut, si in ea loco s ponatur $-s$, quo casu arcus ...m AN abit, valor ipsius x fiat $= t$ seu

$$= \int e^{\frac{-2s}{k}}\, dx.$$

...$dx = Mds$, ubi M sit functio quaedam ipsius s, eaque abeat in ... ponatur $-s$. Ponatur ergo $-s$ loco s, quo casu x abit in t, ... $-Nds$. Est vero quoque

$$dt = e^{\frac{-2s}{k}}\, dx = e^{\frac{-2s}{k}}\, Mds.$$

$$N = -e^{\frac{-2s}{k}}\, M.$$

$$M = e^{\frac{+s}{k}}\, P$$

...in Q posito $-s$ loco s eritque

$$N = e^{\frac{-s}{k}}\, Q.$$

Quibus valoribus loco M et N substitutis prodibit $Q = -P$. Ex quo a
P huiusmodi esse debere functionem ipsius s, quae abeat in $-P$ posi
loco s, quas functiones impares appellare consuevi. Sit itaque P
quaecumque impar ipsius s, cuiusmodi sunt e. gr. αs, αs^3, αs^5 etc., erit

$$M = c^{\frac{s}{k}} P ds \quad \text{seu} \quad x = \int e^{\frac{s}{k}} P ds.$$

Quae est aequatio pro curva quaesita. Q. E. I.

COROLLARIUM 1

768. Quia est

$$dx = c^{\frac{s}{k}} P ds,$$

erit sumendis logarithmis

$$l dx = \frac{s}{k} + l P + l ds.$$

Differentietur haec aequatio denuo posito ds constante prodibitque

$$\frac{ddx}{dx} = \frac{ds}{k} + \frac{dP}{P} \quad \text{seu} \quad k P ddx = P dx ds + k dx dP.$$

Quae aequatio ab exponentialibus est libera.

COROLLARIUM 2

769. Quoniam P per s dari debet, aequatio inventa non habet va
inter se permixtas; quamobrem ea sufficit ad curvas in ea contenta
struendas.

EXEMPLUM

770. Ponamus esse $P = \frac{s}{a}$; erit

$$ax = \int e^{\frac{s}{k}} s ds = k e^{\frac{s}{k}} s - k^2 e^{\frac{s}{k}} + k^2,$$

quae est aequatio pro una et fortasse simplicissima curva satisfaciente.
vero aequatio eliminato exponentiali $e^{\frac{s}{k}}$ abit in hanc

$$axsds = aksdx - k^2 adx + k^2 sds.$$

exposito $e^{\frac{s}{k}}$ per seriem prodibit ista aequatio

$$ax = \frac{s^2}{2} + \frac{s^3}{1 \cdot 3k} + \frac{s^4}{1 \cdot 2 \cdot 4k^2} + \frac{s^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5k^3} + \text{etc.}$$

ec ergo curva in A habet tangentem horizontalem eiusque radius o hoc loco est a. Quia, ne curva fiat imaginaria, esse debet $dx < ds$, oit esse $e^{\frac{s}{k}} s < a$. Quo ergo loco fit $e^{\frac{s}{k}} s$, quae expressio crescente s qu scit, aequalis a, ibi curva AM habebit tangentem verticalem atque p n reversionis. Pro ramo AN posito $-s$ loco $+s$ haec habetur aequ

$$ax = \int e^{\frac{-s}{k}} sds \quad \text{seu} \quad dx = \frac{e^{\frac{-s}{k}} sds}{a}.$$

are quamdiu fuerit $e^{\frac{-s}{k}} s < a$, curva non fit imaginaria. At si usq $s = a$, ibi curva quoque habebit punctum reversionis et diametrum v em. Fieri autem potest, si a satis magnum accipiatur, ut $e^{\frac{-s}{k}} s$ se nus sit quam a, quo casu curva AN in infinitum abibit asymtoto bebit horizontalem BC. Fit autem $e^{\frac{-s}{k}} s = 0$ casibus $s = 0$ et $s =$ bebit ergo valorem maximum, si eius differentiale $= 0$; hoc vero cas $= s$ et

$$e^{\frac{-s}{k}} s = \frac{k}{c}.$$

are si fuerit $a > \frac{k}{c}$, curva habebit asymtoton BC, cuius altitudo BA $\frac{k^2}{a}$. At si fuerit $a < \frac{k}{c}$, curva AN uti alter ramus habebit quoque p n reversionis, quod ex hac aequatione determinabitur

$$a = e^{\frac{-s}{k}} s.$$

priori casu curva AN habere debet punctum flexus contrarii, quod tur ex hac aequatione $1 = \frac{s}{k}$; erit scilicet in N sumto arcu $AN = k$.

PROPOSITIO 85

PROBLEMA

771. *In hypothesi gravitatis et resistentiae praecedente* MA (Fig. 84, p. 376), *super qua descensus absolvantur, in* *curvam* AN *huius proprietatis, ut ascensus cuiusque tempus* *descensus praecedentis.*

SOLUTIO

Positis ut ante potentia sollicitante $= g$ et medii pro curva MA abscissa $AP = x$, arcus $AM = s$ atque AN abscissa $AQ = t$, arcus $AN = r$. Ponatur altitudo quodam in A acquisitae debita $= b$, qua celeritate corpu sum in curva AN absolvet. His positis erit altitudo cel

$$= e^{\frac{s}{k}}\left(b - g\int e^{\frac{-s}{k}}\,dx\right)$$

et altitudo in ascensu celeritati in N debita

$$= e^{\frac{-r}{k}}\left(b - g\int e^{\frac{r}{k}}\,dt\right).$$

Tempus ergo descensus per arcum MA erit

$$= \int \frac{ds}{e^{\frac{s}{2k}}\sqrt{\left(b - g\int e^{\frac{-s}{k}}\,dx\right)}}$$

et tempus ascensus per arcum AN

$$= \int \frac{e^{\frac{r}{2k}}\,dr}{\sqrt{\left(b - g\int e^{\frac{r}{k}}\,dt\right)}},$$

quae duo tempora, si post integrationem ponatur

$$g\int e^{\frac{-s}{k}}\,dx = b \quad \text{atque} \quad g\int e^{\frac{r}{k}}\,dt = b,$$

se aequalia. Ponatur ad hoc obtinendum

$$g\int e^{-\frac{s}{k}}\,dx = X, \quad g\int e^{\frac{r}{k}}\,dt = T$$

$$\frac{ds}{e^{\frac{s}{2k}}} = dS \quad \text{et} \quad e^{\frac{r}{2k}}\,dr = dR,$$

, S et R sint tales functiones, quae evanescant posito x, t, s et
fficiendum ergo est, ut haec duo integralia

$$\int \frac{dS}{\sqrt{(b-X)}} \quad \text{et} \quad \int \frac{dR}{\sqrt{(b-T)}}$$

r se aequalia, si post integrationem ponatur $X=b$ et $T=b$. At
ati et X et T sunt quantitates a b prorsus non pendentes atque
nter se relationem tenere debent, quemcunque valorem b habuerit.
ergo satisfiet, si R fuerit talis functio ipsius T, qualis S est ipsius
sumto $R=S$ esse quoque debet $T=X$. Est vero

$$S = 2k\left(1-e^{-\frac{s}{2k}}\right) \quad \text{et} \quad R = 2k\left(e^{\frac{r}{2k}}-1\right);$$

ur $R=S$ erit

$$2 = e^{\frac{r}{2k}} + e^{-\frac{s}{2k}} \quad \text{atque} \quad r = 2kl\left(2-e^{-\frac{s}{2k}}\right).$$

em hoc posito esse debet $X=T$ seu

$$e^{-\frac{s}{k}}\,dx = e^{\frac{r}{k}}\,dt,$$

$$t = \int e^{\frac{-s-r}{k}}\,dx.$$

o sit

$$e^{\frac{r}{k}} = \left(2-e^{-\frac{s}{2k}}\right)^2 = 4 - 4e^{-\frac{s}{2k}} + e^{-\frac{s}{k}},$$

$$t = \int \frac{dx}{e^{\frac{s}{k}}\left(2-e^{-\frac{s}{2k}}\right)^2} = \int \frac{dx}{\left(2e^{\frac{s}{2k}}-1\right)^2}.$$

Ex quibus ergo constructio curvae innotescit, quia sumto

$$AN = r = 2k\,l\left(2 - e^{\frac{-s}{2k}}\right)$$

huic respondet abscissa

$$AQ = t = \int \frac{dx}{\left(2e^{\frac{s}{2k}} - 1\right)^2}.$$

Aequatio vero pro curva AN commodius invenietur e
inter s et x. Nam quia est

$$s = -2k\,l\left(2 - e^{\frac{r}{2k}}\right) \quad \text{et} \quad x = \int \frac{dt}{\left(2e^{\frac{-r}{2k}} - 1\right)^2}$$

si loco s et x hi valores substituantur, prodibit aequati
curva quaesita AN. Q. E. I.

COROLLARIUM 1

772. Quia est $r = 2k\,l\left(2 - e^{\frac{-s}{2k}}\right)$, erit

$$dr = \frac{e^{\frac{-s}{2k}}ds}{2 - e^{\frac{-s}{2k}}}.$$

Cum vero, ne curva AN fiat imaginaria, esse debeat
eousque erit realis, quousque

$$ds > \frac{dx}{e^{\frac{s}{2k}}\left(2 - e^{\frac{-s}{2k}}\right)} \quad \text{seu} \quad ds > \frac{dx}{2e^{\frac{s}{2k}} - 1}.$$

COROLLARIUM 2

773. Est vero $e^{\frac{s}{2k}}$ semper maius unitate; ex quo
$ds > dx$, eo magis fore

$$ds > \frac{dx}{2e^{\frac{s}{2k}} - 1}.$$

Quare si curva data fuerit realis, quaesita quoque semper

COROLLARIUM 3

Cum sit $s = -2kl\left(2 - e^{\frac{r}{2k}}\right)$, erit

$$ds = \frac{e^{\frac{r}{2k}}dr}{2 - e^{\frac{r}{2k}}} = \frac{dr}{2e^{\frac{-r}{2k}} - 1},$$

us relatio inter ds et dx in computum duci potest.

COROLLARIUM 4

Ex solutione problematis simul apparet, quomodo eius inversum um. Si enim curva ascensuum AN datur seu aequatio inter t et equatio inter x et s formabitur ope aequationum

$$t = \int \frac{dx}{\left(2e^{\frac{s}{2k}} - 1\right)^2} \quad \text{et} \quad r = 2kl\left(2 - e^{\frac{-s}{2k}}\right).$$

COROLLARIUM 5

Ad curvae formam circa punctum A indagandam ponantur s et r ua eritque $e^{\frac{-s}{2k}} = 1$, unde fiet $dr = ds$ atque $dt = dx$. Ex quo curvarum MA et NA infimas portiones esse inter se similes et

EXEMPLUM 1

Sit linea descensuum data recta MA (Fig. 85, p. 380) utcunque in- sit $s = \alpha x$ seu $ds = \alpha dx$. Cum nunc sit

$$ds = \frac{dr}{2e^{\frac{-r}{2k}} - 1} \quad \text{et} \quad dx = \frac{dt}{\left(2e^{\frac{-r}{2k}} - 1\right)^2},$$

inter t et r pro curva quaesita ista aequatio

$$dr = \frac{\alpha dt}{2e^{\frac{-r}{2k}} - 1} \quad \text{seu} \quad \alpha dt = 2e^{\frac{-r}{2k}}dr - dr,$$

gralis est

$$\alpha t = 4k\left(1 - e^{\frac{-r}{2k}}\right) - r.$$

Quae aequatio in seriem conversa dat

$$\alpha t = r - \frac{r^2}{1\cdot 2k} + \frac{r^3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 2k^2} - \frac{r^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 4k^3} + \text{(}$$

ideoque in puncto infimo A est $dr = \alpha dt$. Curva haec alic gentem horizontalem, qui locus invenietur ponendo $dt = 0$ $2 = e^{\frac{r}{2k}}$ seu $r = 2kl2$, cui respondet $\alpha t = 2k - 2kl2$. Atqu quam $2kl2$, valor ipsius dt fiet negativus ideoque curva donec $-dt$ fiat $= dr$; hoc autem accidit, si est

$$1 - \alpha = 2e^{\frac{-r}{2k}} \quad \text{seu} \quad r = 2kl\frac{2}{1-\alpha}.$$

At quia α non potest esse minus quam 1, si est $\alpha = 1$, tan infinitum ab A distabit, atque si $\alpha > 1$, ultra tangentem h quam habebit tangentem verticalem. Sed antrorsum ultra t verticalem, ubi est

$$r = -2kl\frac{1+\alpha}{2}.$$

Casu ergo, quo linea data est verticalis seu $\alpha = 1$, fit $r =$ A erit verticalis.

COROLLARIUM 6

778. Si s denotet totum arcum descensus, r exprim sequenti ascensu super curva AN (Fig. 84, p. 376) descriptum arcus descensus s, reperietur arcus ascensus

$$r = 2kl\left(2 - e^{\frac{-s}{2k}}\right).$$

Quoniam enim posuimus $T = X$, integros arcus descensus e s et r denotant.

EXEMPLUM 2

779. Sit curva data MA ipsa tautochrona descensuum eadem resistentiae hypothesi invenimus; habebit curva AN h ut omnes ascensus aequalibus quoque absolvantur temporib quibus descensus super MA. Quare curva AN erit ipsa t suum cum curva MA continua iam ante inventa. Quo h

endatur, sumamus aequationem pro curva tautochrona descensuum, § 719]

$$\text{vel } a\,dx = k\left(e^{\frac{s}{2k}} - 1\right) ds \quad \text{vel} \quad ax = 2k^2\left(e^{\frac{s}{2k}} - 1\right) - ks.$$

sit

$$s = \frac{dr}{2e^{\frac{-r}{2k}} - 1} \quad \text{et} \quad e^{\frac{s}{2k}} = \frac{e^{\frac{-r}{2k}}}{2e^{\frac{-r}{2k}} - 1} \quad \text{atque} \quad dx = \frac{dt}{\left(2e^{\frac{-r}{2k}} - 1\right)^2},$$

itis erit

$$\frac{a\,dt}{\left(2e^{\frac{-r}{2k}} - 1\right)^2} = \frac{k\,dr\left(1 - e^{\frac{-r}{2k}}\right)}{\left(2e^{\frac{-r}{2k}} - 1\right)^2}$$

$$a\,dt = k\left(1 - e^{\frac{-r}{2k}}\right) dr.$$

tio ex illa formatur, si pro x ponatur t atque $-r$ pro s. Quare AN est continua cum MA atque tautochrona ascensuum.

COROLLARIUM 7

Dato ergo arcu descensus s super tautochrona descensuum erit sus sequentis super tautochrona ascensuum

$$r = 2kl\left(2 - e^{\frac{-s}{2k}}\right).$$

scensus a cuspide tautochronae descensuum incipiat, cuius locum dat

$$e^{\frac{s}{2k}} = \frac{a+k}{k}$$

t arcus ascensus

$$r = 2kl\,\frac{2a+k}{a+k},$$

ivenimus (§ 732).

SCHOLION

Cum itaque tautochrona in hac resistentiae hypothesi quaesito atque sit curva continua, hinc ansam arripimus investigandi plures tinuas, quarum duo rami vices curvarum MA et AN sustinere quod in sequente propositione praestabimus.

PROPOSITIO 86

PROBLEMA

782. *Iisdem positis ut ante invenire casus, quibus duae curv* (Fig. 84, p. 376), *super quibus descensus et sequentes ascensus poribus absolvantur, unam curvam continuam constituunt.*

SOLUTIO

Manentibus iisdem denominationibus, quibus in praecedem usi sumus, scilicet $AP = x$, $AM = s$, $AQ = t$ et $AN = r$ aequationes ibi inventas

$$2 = e^{\frac{r}{2k}} + e^{\frac{-s}{2k}} \quad \text{et} \quad e^{\frac{-s}{k}} dx = e^{\frac{r}{k}} dt$$

effici debet, ut aequationes inter s et x et inter r et t sub ea comprehendantur. Sumamus ad hoc novam variabilem z, ex M in curva AM determinetur, ita ut, si z fiat negativum obtineatur punctum N in altera curva. Hanc ob rem s oportet functionem ipsius z, ut eadem, si loco z ponatur $-$ AN, qui ob positionem negativam est $-r$, ita ut s abeat $-z$ loco z. Ponatur

$$e^{\frac{-s}{2k}} = 1 + Q;$$

erit

$$e^{\frac{r}{2k}} = 1 - Q$$

propter $2 = e^{\frac{r}{2k}} + e^{\frac{-s}{2k}}$ ideoque Q erit functio impar ipsius negativam abit facto z negativo. Erit itaque

$$e^{\frac{-s}{k}} = (1 + Q)^2 \quad \text{et} \quad e^{\frac{r}{k}} = (1 - Q)^2.$$

Porro autem esse debet

$$dx(1 + Q)^2 = dt(1 - Q)^2$$

atque x talis esse debet functio ipsius z, quae abeat in gativo. Ponatur $dx = Mdz$ abeatque M in N facto z nega

mobrem fiet

$$M(1+Q)^2 = -N(1-Q)^2.$$

$$M = P(1-Q)^2$$

o = functioni impari ipsius z; atque tum fiet

$$N = -P(1+Q)^2$$

inter se erunt $M(1+Q)^2$ et $-N(1-Q)^2$, uti requiritur.
ubitu loco P et Q functionibus imparibus ipsius z erit

$$x = Pdz(1-Q)^2 \quad \text{seu} \quad x = \int Pdz(1-Q)^2$$

$$s = 2kl\frac{1}{1+Q}.$$

es oriuntur curvae MA, quarum partes continuae AN
t isochronos respective descensibus super MA factis. Quia
iones occurrunt P et Q, determinetur altera, ut sit

$$s = 2kl\frac{1}{1-z} \quad \text{atque} \quad x = \int Pdz(1+z)^2.$$

ore aequatione valor ipsius z ex priore, qui est $= 1 - e^{\frac{-s}{2k}}$,
iturque aequatio inter x et s pro curva quaesita. Q. E. I.

COROLLARIUM 1

, fit quoque $s = 0$. Quare integrale ipsius $Pdz(1+z)^2$ ita
evanescat posito $z = 0$. Nam evanescente arcu s abscissa
re debet.

COROLLARIUM 2

$s = 2kl\frac{1}{1-z}$, erit

$$ds = \frac{2kdz}{1-z},$$

et quia est $dx = Pdz(1+z)^2$, erit

$$\frac{ds}{dx} = \frac{2k}{P(1-z^2)(1+z)};$$

nisi ergo $P(1-z^2)(1+z)$ maius fuerit quam $2k$, curva erit

COROLLARIUM 3

785. In puncto infimo A, quia evanescit z, erit

$$\frac{ds}{dx} = \frac{2k}{P}.$$

Quare P talis esse debet functio impar ipsius z, ut ea, si
quam $2k$; hoc autem evenire non potest, nisi P talis fuerit
quae evanescat posito $z=0$, hocque casu tangens in A erit

EXEMPLUM 1

786. Quia P debet esse functio impar ipsius z, ponatu

$$P = \frac{az}{(1-z^2)^2}.$$

Quo posito erit

$$x = \int \frac{azdz}{(1-z)^2} \quad \text{seu} \quad dx = \frac{azdz}{(1-z)^2}.$$

Est vero

$$z = 1 - e^{\frac{-s}{2k}} \quad \text{et} \quad dz = \frac{1}{2k} e^{\frac{-s}{2k}} ds \quad \text{atque} \quad 1 - z$$

Quibus substitutis habebitur

$$dx = \frac{ae^{\frac{-s}{2k}} ds\left(1 - e^{\frac{-s}{2k}}\right)}{2ke^{\frac{-s}{k}}} = \frac{ads}{2k}\left(e^{\frac{s}{2k}} - 1\right).$$

Quae est aequatio pro curva tautochrona supra inventa,
MA omnes descensus aequalibus absolvuntur temporibus,
altera AN omnes ascensus iisdem temporibus.

$$P = \frac{6az - 2az^3}{(1-zz)^3};$$

$$x = \int \frac{6azdz - 2az^3dz}{(1-z)^2} = \frac{3az^2 + az^3}{1-z}.$$

it

$$z = 1 - c^{\frac{-s}{2k}} \quad \text{et} \quad 1 - z = c^{\frac{-s}{2k}},$$

$$\frac{\ldots - c^{\frac{-s}{2k}})^2\left(4 - c^{\frac{-s}{2k}}\right)}{c^{\frac{-s}{2k}}} = a\left(1 - c^{\frac{-s}{2k}}\right)^2\left(4c^{\frac{s}{2k}} - 1\right) = a\left(4c^{\frac{s}{2k}} - \left(3 - c^{\frac{-s}{2k}}\right)^2\right).$$

o in seriem conversa dat

$$\frac{4k^2x}{3a} = ss + \frac{s^3}{6k} - \frac{s^4}{48k^2} + \frac{s^5}{96k^3} - \frac{s^6}{640k^4} + \text{etc.} = bx$$

anto a in $\frac{4k^2}{3b}$.

PROPOSITIO 87

PROBLEMA

hypothesi gravitatis uniformis deorsum tendentis et medio uniformi celeritatum ratione resistente si detur curva quaecunque MA (Fig. 87, *qua corpus descensus absolvat, invenire curvam AN ei iungendam idoneam, ita ut omnes semioscillationes, quae super curva MAN fiunt, solvantur temporibus.*

SOLUTIO

ut hactenus potentia sollicitante g et exponente resistentiae k datae MA abscissa $AP = x$, arcus $AM = s$, curvae vero oscissa $AQ = t$, arcus $AN = r$. Incipiat nunc descensus in quo- ae MA puncto sitque celeritas in A acquisita debita altitudini b, e corpus sequentem ascensum in curva AN absolvet. His positis o celeritati corporis descendentis in M debita

$$= e^{\frac{s}{k}}\left(b - g\int e^{\frac{-s}{k}}dx\right)$$

et altitudo celeritati corporis ascendentis in N debita

$$= e^{\frac{-r}{k}}\left(b - g\int e^{\frac{r}{k}}dt\right).$$

Ex his erit tempus, quo in hac semioscillatione arcus MA et A

$$=\int \frac{ds}{e^{\frac{s}{2k}}\sqrt{\left(b-g\int e^{\frac{-s}{2k}}dx\right)}} + \int \frac{dr}{e^{\frac{-r}{2k}}\sqrt{\left(b-g\int e^{\frac{r}{2k}}dt\right)}},$$

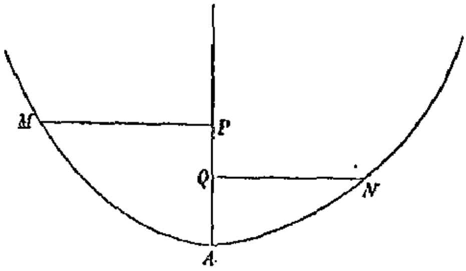


Fig. 87.

quae expressio integrum
lationis tempus, si pos
ponatur

$$g\int e^{\frac{-s}{k}}dx = b \quad \text{atque}$$

Cum igitur hoc tempus
habere valorem constant
quantitate litterae b p
conditione determinari
inter t et r ope datae aequationis inter x et s. Ponamus

$$g\int e^{\frac{-s}{k}}dx = X \quad \text{et} \quad g\int e^{\frac{r}{k}}dt = T$$

atque

$$\frac{ds}{e^{\frac{s}{2k}}} = dS \quad \text{et} \quad \frac{dr}{e^{\frac{-r}{2k}}} = dR.$$

Quibus substitutis habere debebit

$$\int \frac{dS}{\sqrt{(b-X)}} + \int \frac{dR}{\sqrt{(b-T)}}$$

post integrationem ponatur $X = b$
quia T ab X non pendet; habebim

$$\int \frac{dS + dR}{\sqrt{(b-X)}},$$

...se comparata, ut post integrationem facto $X = b$ littera b
...o evanescat. Hoc autem fiet, si fuerit

$$dS + dR = \frac{\alpha\, dX}{\sqrt{X}};$$

... semioscillationis

$$= \int \frac{\alpha\, dX}{\sqrt{(bX - XX)}} = \pi \alpha$$

...pheriam circuli, cuius diameter $= 1$. Sit

$$\alpha = \frac{\sqrt{2f}}{\sqrt{g}};$$

...udinem penduli in vacuo et gravitate $= g$ semioscillationes
...tempore absolventis, quo hae semioscillationes super curvis
...guntur (§ 167). Cum igitur sit

$$dS + dR = \frac{dX\sqrt{2f}}{\sqrt{gX}},$$

$$S + R = 2\sqrt{\frac{2fX}{g}} = 2\sqrt{2f}\int e^{-\frac{s}{k}}\, dx.$$

$$S = 2k\left(1 - e^{-\frac{s}{2k}}\right) \quad \text{et} \quad R = 2k\left(e^{\frac{r}{2k}} - 1\right),$$

$$k e^{\frac{r}{2k}} - k e^{-\frac{s}{2k}} = \sqrt{2f}\int e^{-\frac{s}{k}}\, dx$$

$$e^{\frac{r}{2k}} = e^{-\frac{s}{2k}} + \frac{1}{k}\sqrt{2f}\int e^{-\frac{s}{k}}\, dx$$

$$r = 2kl\left(e^{-\frac{s}{2k}} + \frac{1}{k}\sqrt{2f}\int e^{-\frac{s}{k}}\, dx\right).$$

... ipsius r respondens valor ipsius t ex hac aequatione de-
... X seu

$$e^{\frac{r}{k}}\, dt = e^{-\frac{s}{k}}\, dx.$$

Ex quo invenitur

$$t = \int \frac{dx}{\left(1 + \frac{1}{k} e^{\frac{s}{2k}} \sqrt{2f\int e^{\frac{-s}{k}} dx}\right)^2},$$

ex quibus constructio curvae innotescit. Aequatio autem pro
AN commodius ex data aequatione inter x et s obtinebitur, si lo

$$-2kl\left(e^{\frac{r}{2k}} - \frac{1}{k}\sqrt{2f\int e^{\frac{r}{k}} dt}\right)$$

et loco x hic valor

$$\int \frac{dt}{\left(1 - \frac{1}{k} e^{\frac{-r}{2k}} \sqrt{2f\int e^{\frac{r}{k}} dt}\right)^2}.$$

His enim substitutis orietur haec aequatio inter r et t, qua
quaesita AN. Q. E. I.

COROLLARIUM 1

789. Cum oscillationes minimae congruant cum oscillati
si curvae MA tangens in A non fuerit horizontalis vel si
A fuerit infinite parvus, curvae quaesitae AN radius oscu
Erit enim hoc casu tempus descensus minimi $= 0$ et
$= \frac{\pi\sqrt{2f}}{\sqrt{g}}$.

COROLLARIUM 2

790. Sin autem curvae MA in A radius osculi fuerit
dinis, scilicet h, erit tempus descensus minimi $= \frac{\pi\sqrt{2h}}{2\sqrt{g}}$ (§ 1
tempus semioscillationis sit $= \frac{\pi\sqrt{2f}}{\sqrt{g}}$, erit radius osculi c
$=(2\sqrt{f} - \sqrt{h})^2$; debet autem esse $h < 4f$ seu $f > \frac{1}{4}h$, ne curva A

COROLLARIUM 3

791. Curvae ergo MA et AN in A et tangentem hor
dium osculi communem habebunt, si fuerit $f = h$. Hoc c
AN radius osculi in A fiet quoque $= h$.

SCHOLION 1

792. Quemadmodum hic ex data curva descensuum curvam ascensu
minavimus, ita perspicitur simili modo ex curva ascensuum data curv
nsuum inveniri posse; si enim detur aequatio inter t et r, quia est

$$s = -2kl\left(e^{\frac{r}{2k}} - \frac{1}{k}\sqrt{2f}\int e^{\frac{r}{k}}\,dt\right)$$

$$x = \int \frac{dt}{\left(1 - \frac{1}{k}e^{\frac{-r}{2k}}\sqrt{2f}\int e^{\frac{r}{k}}\,dt\right)^2},$$

valoribus substituendis aequatio pro curva descensuum inter s et x
itur.

COROLLARIUM 4

793. Cum f innumerabiles habere possit valores, modo sit $f > \frac{1}{4}h$,
vis curvam sive descensuum sive ascensuum datam innumerae adi
unt curvae eiusmodi, ut semioscillationes super iis factae sint om
ronae, omnino uti in vacuo fieri potest.

COROLLARIUM 5

794. *Quia in solutione posuimus* $T = X$, hac aequatione relatio co
r inter quemque arcum descensus integrum et arcum responde
nsus. Ita, si arcus descensus fuerit s, erit arcus ascensus

$$r = 2kl\left(e^{\frac{-s}{2k}} + \frac{1}{k}\sqrt{2f}\int e^{\frac{-s}{k}}\,dx\right).$$

EXEMPLUM 1

795. Sit linea descensuum data recta verticalis PA, pro qua est $s =$
ergo quoque $ds = dx$ atque

$$\int e^{\frac{-s}{k}}\,dx = k\left(1 - e^{\frac{-s}{k}}\right).$$

Unde igitur fiet

$$r = 2kl\left(e^{\frac{-s}{2k}} + \sqrt{\frac{2f}{k}}\left(1 - e^{\frac{-s}{k}}\right)\right)$$

seu

$$e^{\frac{r}{2k}} = e^{\frac{-s}{2k}} + \sqrt{\frac{2f}{k}}\left(1 - e^{\frac{-s}{k}}\right).$$

Porro autem est

$$t = \int \frac{ds}{\left(1 + e^{\frac{s}{2k}}\sqrt{\frac{2f}{k}\left(1 - e^{\frac{-s}{k}}\right)}\right)^2} \quad \text{seu} \quad e^{\frac{r+s}{k}}\, dt = \ldots$$

Eliminato ergo s prodibit pro curva ascensuum ista aequat

$$(2f + k)^2 dt = k(2f - k)dr - \frac{2kf(2f + k)dr - 4fk^2 \ldots}{e^{\frac{r}{2k}}\sqrt{\left(4ff + 2fk - 2f \ldots\right.}}$$

in qua variabiles sunt a se invicem separatae, quare ea a
endam sufficit. Integratio vero huius aequationis a quadrat
Pro vacuo ex hac aequatione elicitur faciendo $k = \infty$ ista

$$dt + dr = \frac{dr\sqrt{2f}}{\sqrt{(2f - r)}} \quad \text{seu} \quad t = 4f - r - 2\sqrt{2f(2 \ldots}$$

quae aequatio ad eam, quam in capite praecedente [§ 464]
potest.

EXEMPLUM 2

796. Sit linea descensuum data ipsa tautochrona
[§ 719] inventa, cuius aequatio est

$$adx = kds\left(e^{\frac{s}{2k}} - 1\right).$$

Erit ergo

$$\int e^{\frac{-s}{k}} dx = \frac{k}{a}\int ds\left(e^{\frac{-s}{2k}} - e^{\frac{-s}{k}}\right) = \frac{2k^2}{a}\left(\frac{1}{2} - e^{\frac{-s}{2k}} + \frac{1}{2}e^{\frac{-s}{k}}\right) = \ldots$$

et

$$\sqrt{\int e^{\frac{-s}{k}} dx} = \frac{k\left(1 - e^{\frac{-s}{2k}}\right)}{\sqrt{a}}.$$

fiet

$$e^{\frac{r}{2k}} = e^{\frac{-s}{2k}} + \frac{\sqrt{2f} - e^{\frac{-s}{2k}}\sqrt{2f}}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{2f} + e^{\frac{-s}{2k}}(\sqrt{a} - \sqrt{2f})}{\sqrt{a}}$$

$$e^{\frac{-s}{2k}} = \frac{e^{\frac{r}{2k}}\sqrt{a} - \sqrt{2f}}{\sqrt{a} - \sqrt{2f}} \quad \text{et} \quad ds = \frac{e^{\frac{r}{2k}}\,dr\sqrt{a}}{\sqrt{2f} - e^{\frac{r}{2k}}\sqrt{a}}$$

$$adx = \frac{ake^{\frac{r}{2k}}\,dr\left(e^{\frac{r}{2k}} - 1\right)}{\left(e^{\frac{r}{2k}}\sqrt{a} - \sqrt{2f}\right)^2}.$$

porro sit

$$e^{\frac{-s}{k}}\,dx = e^{\frac{r}{k}}\,dt,$$

$$ae^{\frac{r}{k}}\,dt = \frac{ake^{\frac{r}{2k}}\,dr\left(e^{\frac{r}{2k}} - 1\right)}{(-\sqrt{a} + \sqrt{2f})^2} \quad \text{sive} \quad adt = \frac{akdr\left(1 - e^{\frac{-r}{2k}}\right)}{(-\sqrt{a} + \sqrt{2f})^2}$$

$$(-\sqrt{a} + \sqrt{2f})^2 dt = kdr\left(1 - e^{\frac{-r}{2k}}\right),$$

ius esse debet quam $\sqrt{a}$. Haec autem aequatio inventa com-
nnes tautochronas ascensuum; quae enim harum cunque cum tau-
scensuum iungatur, super curva ex iis composita omnes semi-
debent esse isochronae. Si sumatur $f = 2a$, aequatio erit haec

$$adt = kdr\left(1 - e^{\frac{-r}{2k}}\right),$$

tautochrona ascensuum, super qua omnes ascensus eodem tem-
untur quo descensus super tautochrona descensuum data, atque
nuatio tautochronae descensuum.

EXEMPLUM 3

linea descensuum data MA tautochrona ascensuum et quaeratur,
e cum ea iunctae semioscillationes isochronas producant. Aequatio
c curva MA est

$$adx = kds\left(1 - e^{\frac{-s}{2k}}\right).$$

Erit ergo

$$\int e^{-\frac{s}{k}} dx = \frac{k}{a}\int ds\left(e^{-\frac{s}{k}} - e^{-\frac{3s}{2k}}\right) = \frac{k^2}{a}\left(\frac{1}{3} - e^{-\frac{s}{k}} + \frac{2}{3}e^{-\frac{3s}{2k}}\right) = \frac{k^2}{3a}\left(1 - 3\right.$$

$$= \frac{k^2}{3a}\left(1 + 2e^{-\frac{s}{2k}}\right)\left(1 - e^{-\frac{s}{2k}}\right)^2.$$

Ex his oritur

$$e^{\frac{r}{2k}} = e^{-\frac{s}{2k}} + \left(1 - e^{-\frac{s}{2k}}\right)\sqrt{\frac{2f}{3a}\left(1 + 2e^{-\frac{s}{2k}}\right)}$$

atque

$$t = \frac{k}{a}\int \frac{ds\left(1 - e^{-\frac{s}{2k}}\right)}{\left(1 + \left(e^{\frac{s}{2k}} - 1\right)\sqrt{\frac{2f}{3a}\left(1 + 2e^{-\frac{s}{2k}}\right)}\right)^2},$$

ex quibus constructio curvae consequitur.

SCHOLION 2

798. Hoc exemplum ideo attulimus, ut appareat, cum
tautochronam ascensuum coniunctam esse oporteat, quo semioscil
aequalibus temporibus absolvantur. Ex formulis autem inv
curvam quaesitam non esse tautochronam descensuum; aequati

$$cdt = kdr\left(e^{\frac{r}{2k}} - 1\right)$$

in illis formulis non continetur, quod periculum facienti s
Quamobrem si MA fuerit tautochrona descensuum et AN ascen
omnes itus per MAN iisdem absolvantur temporibus, tame
semioscillationes sequentes per NAM non erunt isochronae. E
quod secundum curvas MA et AN oscillari efficitur, oscillatio
isochronas, etiamsi alternae semioscillationes, in quibus desce
MA incipit, aequalibus peragantur temporibus. Haec conse
composita MAN non est idonea ad pendulorum motum in m
aequabilem efficiendum. Optimum vero huic incommodo remed
si casus determinaretur, quo curva AN similis et aequali
prodiret.

PROPOSITIO 88

PROBLEMA

ae MA et AN (Fig. 87, p. 396) *eam habuerint proprietatem, ationes, quae in curva MA incipiunt, sint inter se isochronae duplicata ratione celeritatum resistit, determinare casus, quibus oniunctae MA et AN unam curvam continuam constituunt.*

SOLUTIO

isdem denominationibus, quas in praecedente propositione t $AP = x$, $AM = s$, $AQ = t$ et $AN = r$ atque $f =$ longitudini in vacuo et gravitate $= g$, invenimus ibi has duas aequationes

$$e^{\frac{r}{2k}} - ke^{\frac{s}{2k}} = \sqrt{2f}\int e^{\frac{-s}{k}}\,dx \quad \text{et} \quad e^{\frac{r}{k}}\,dt = e^{\frac{s}{k}}\,dx,$$

er utramque curvam continetur. Iam quia curvae MA et sse rami curvae continuae, aequatio inter x et s ita debet it, si x abeat in t, tum s fiat $= -r$ propter situm negaccipiamus novam variabilem z, cuius s et x sint tales func negativo x abeat in t et s in $-r$. Sit

$$\int e^{\frac{-s}{k}}\,dx = z^2;$$

$$ke^{\frac{r}{2k}} - ke^{\frac{-s}{2k}} = z\sqrt{2f};$$

tivo, quo casu r in $-s$ et $-s$ in r transit, prodibit

$$ke^{\frac{-s}{2k}} - ke^{\frac{r}{2k}} = -z\sqrt{2f};$$

n priore congruit. Sit P functio quaecunque par ipsius z, , etiam si loco z ponatur $-z$, et ponatur

$$ke^{\frac{-s}{2k}} = -\frac{1}{2}z\sqrt{2f} + P;$$

quo posito quaesito satisfiet. Namque faciamus z negativum; ab
r atque habebitur

$$ke^{\frac{r}{2k}} = \frac{1}{2} z\sqrt{2f} + P \quad \text{ac} \quad ke^{\frac{r}{2k}} - ke^{\frac{-s}{2k}} = z\sqrt{2f},$$

uti requiritur. Alteri aequationi

$$\int e^{\frac{r}{k}} dt = \int e^{\frac{-s}{k}} dx$$

per hanc

$$\int e^{\frac{-s}{k}} dx = z^2$$

iam satisfit; posito enim z negativo et dt loco dx atque r loco -

$$\int e^{\frac{r}{k}} dt = z^2 = \int e^{\frac{-s}{k}} dx.$$

Ex variabili ergo z, cuius P est functio quaecunque par, curva qu
cuius continua est altera AN, ita determinatur, ut sit

$$e^{\frac{-s}{2k}} = -\frac{z\sqrt{2f}}{2k} + \frac{P}{k} \quad \text{atque} \quad dx = 2e^{\frac{s}{k}} z dz = \frac{8k^2 z dz}{(2P - z\sqrt{2f})}$$

Erit ergo

$$x = 8k^2 \int \frac{z dz}{(2P - z\sqrt{2f})^2} \quad \text{et} \quad s = 2k\, l \frac{2k}{2P - z\sqrt{2f}}.$$

Sit

$$z = \frac{u\sqrt{2}}{\sqrt{f}}$$

tum ad formulas simpliciores efficiendas tum ad homogeneitatem
producendam, quia debebit esse u unius dimensionis; erit ergo P
ipsius u unius dimensionis quoque. Quare habebitur

$$s = 2k\, l \frac{k}{P - u} \quad \text{atque} \quad x = \frac{4k^2}{f} \int \frac{u du}{(P - u)^2}.$$

Q. E. I.

COROLLARIUM 1

800. Infinitae ergo curvae tautochronae MAN inveniuntu
varii valores loco P, qui omnes sint functiones pares ipsius u, s

ero inter x et s obtinebitur, si ex duabus aequationibus inventis

$$s = 2kl\frac{k}{P-u} \quad \text{atque} \quad x = \frac{4k^2}{f}\int\frac{udu}{(P-u)^3}$$

, quae etiam in P inest, eliminetur.

COROLLARIUM 2

uia est $s = 2kl\frac{k}{P-u}$, erit

$$ds = \frac{2k(du-dP)}{P-u}$$

$$e^{\frac{s}{2k}} = \frac{k}{P-u} \quad \text{seu} \quad P-u = ke^{-\frac{s}{2k}}$$

$$e^{\frac{s}{2k}}ds = \frac{2k^2(du-dP)}{(P-u)^2}.$$

equatione si altera

$$dx = \frac{4k^2udu}{f(P-u)^2}$$

, prodibit

$$\frac{e^{\frac{s}{2k}}ds}{dx} = \frac{f(du-dP)}{2udu}.$$

tio ad eliminandum u est saepe commodissima.

SCHOLION 1

uia evanescente s quoque x evanescere debet, primum investi-
, quo ipsi u dato valore s evanescat. Deinde integrale

$$\int\frac{udu}{(P-u)^2}$$

ebet, ut evanescat, si loco u idem valor substituatur. Hocque
est cum in constructione curvae, quae ope duarum inventarum
perfici potest, tum in concinnatione aequationis inter x et s, si

quidem ea ex aequatione integrata

$$x = \frac{4k^2}{f}\int\frac{u\,du}{(P-u)^2}$$

deducatur. Ceterum si loco u et P quaelibet eorum multipla
loco duarum inventarum aequationum adhiberi possunt istae

$$s = 2k\,l\,\frac{c}{P-u} \quad\text{et}\quad x = \frac{4k^2}{f}\int\frac{u\,du}{(P-u)^2},$$

ubi constans c est arbitraria et idcirco ita determinari potest,
casu evanescat, quo evanescit x. At s evanescit, si $u=0$, quia

$$\int e^{-\frac{s}{k}}\,dx = \frac{2u^2}{f}$$

atque $\int e^{-\frac{s}{k}}\,dx$ evanescit evanescente s; quare c aequale esse debet
P, si in eo ponatur $u=0$. Eodem ergo casu x debet evanesc
constans in integratione valoris ipsius x determinatur. Vel e
talis functio par ipsius u accipi debet, quae fiat $=c$, si ponatu

COROLLARIUM 3

803. Cum longitudo penduli isochroni in vacuo et gravitate
atque oscillationes minimae in medio resistente non discrepent
nibus in vacuo, erit radius osculi curvae in $A = f$, si quidem ta
in A fuerit horizontalis.

EXEMPLUM 1

804. Quia P esse debet functio par ipsius u, sit P const
quo posito $u=0$ fiat $s=0$. Erit ergo

$$k-u = ke^{-\frac{s}{2k}} \quad\text{seu}\quad u = k\left(1-e^{-\frac{s}{2k}}\right).$$

Atque ob $dP=0$ habebitur

$$\frac{e^{\frac{s}{2k}}ds}{dx} = \frac{f}{2u} \quad\text{seu}\quad u = \frac{fe^{-\frac{s}{2k}}dx}{2ds}.$$

Ex quibus aequationibus conficitur ista

$$\frac{f\,dx}{2} = k\,ds\left(e^{\frac{s}{2k}}-1\right).$$

uatio est pro ipsa tautochrona descensuum; quae ultra A conti-
tautochronam ascensuum; atque omnes semioscillationes super hac
tinua, si modo in ramo MA incipiant, erunt isochronae.

EXEMPLUM 2

Sit

$$P = k + \frac{u^2}{a};$$

P eundem valorem facto u negativo. Hoc posito erit

$$k - u + \frac{u^2}{a} = ke^{\frac{s}{2k}}$$

r $dP = \frac{2udu}{a}$ erit

$$\frac{e^{\frac{s}{2k}}\,ds}{dx} = \frac{f(a-2u)}{2au};$$

equatione prodit

$$u = \frac{fadx}{2\left(ae^{\frac{s}{2k}}\,ds + fdx\right)}.$$

s u valor in altera aequatione substitutus dat

$$2fa^2e^{\frac{s}{k}}\,dxds = 4k\left(e^{\frac{s}{2k}} - 1\right)\left(ae^{\frac{s}{2k}}\,ds + fdx\right)^2 - f^2ae^{\frac{s}{2k}}\,dx^2$$

racta radice

$$\frac{ae^{\frac{s}{2k}}ds}{fdx} = \frac{ae^{\frac{s}{2k}}}{4k\left(e^{\frac{s}{2k}}-1\right)} - 1 \pm \sqrt{\frac{ae^{\frac{s}{2k}}}{4k\left(e^{\frac{s}{2k}}-1\right)}\left(\frac{ae^{\frac{s}{2k}}}{4k\left(e^{\frac{s}{2k}}-1\right)} - 1\right)}.$$

asu speciali, si fuerit $a = 4k$, ista aequatio abit in hanc

$$\frac{4ke^{\frac{s}{2k}}ds}{fdx} = \frac{1 \pm e^{\frac{s}{4k}}}{e^{\frac{s}{2k}} - 1},$$

s aequationes in se complectitur, quarum altera est

$$fdx = 4ke^{\frac{s}{2k}}ds\left(e^{\frac{s}{4k}} - 1\right)$$

$$-fdx = 4ke^{\frac{s}{2k}}ds\left(e^{\frac{s}{4k}} + 1\right).$$

Harum autem posterior, quia posito $s=0$ non evanescit dx et ob ipsius dx negativum, est inutilis. Prior vero integrata dat

$$fx = 16k^2\left(\frac{e^{\frac{3s}{4k}}}{3} - \frac{e^{\frac{s}{2k}}}{2} + \frac{1}{6}\right)$$

seu

$$3fx = 8k^2\left(2e^{\frac{3s}{4k}} - 3e^{\frac{s}{2k}} + 1\right).$$

Quae ultra A continuata hac aequatione exprimitur

$$3ft = 8k^2\left(2e^{\frac{-3r}{4k}} - 3e^{\frac{-r}{2k}} + 1\right).$$

Per seriem vero habetur ista aequatio

$$fx = \frac{s^2}{2} + \frac{5s^3}{24k} + \frac{19s^4}{384k^2} + \text{etc.}$$

et pro altera curvae parte AN haec

$$ft = \frac{r^2}{2} - \frac{5r^3}{24k} + \frac{19r^4}{384k^2} - \text{etc.}$$

COROLLARIUM 4

806. Quia est

$$z^2 = \frac{2u^2}{f} = \int e^{\frac{-s}{k}} dx,$$

erit

$$u = \sqrt{\frac{1}{2}f\int e^{\frac{-s}{k}} dx}.$$

Eliminato vero u est

$$P = ke^{\frac{-s}{2k}} + \sqrt{\frac{1}{2}f\int e^{\frac{-s}{k}} dx}.$$

Quare si ille valor ipsius u in hac aequatione substituatur, prodibit aequatio inter s et x.

EXEMPLUM 3

807. Ponamus esse

$$P = \sqrt{(k^2+u^2)} \quad \text{seu} \quad P^2 = k^2 + u^2;$$

$\cdot$ et u^2 valoribus supra datis erit

$$e^{\frac{-s}{2k}}\sqrt{2f\int e^{\frac{s-s}{k}}dx}=k^2 \quad \text{seu} \quad \sqrt{2f\int e^{\frac{s-s}{k}}dx}=k\left(e^{\frac{s}{2k}}-e^{\frac{-s}{2k}}\right).$$

nendis oritur

$$f\int e^{\frac{s-s}{k}}dx=k^2\left(e^{\frac{s}{2k}}-e^{\frac{-s}{2k}}\right)^2=k^2\left(e^{\frac{s}{k}}+e^{\frac{-s}{k}}-2\right).$$

o differentiata dat hanc

$$dx=kds\left(e^{\frac{s}{k}}-e^{\frac{-s}{k}}\right) \quad \text{seu} \quad 2fdx=kds\left(e^{\frac{2s}{k}}-1\right),$$

$$2fx=\frac{k^2e^{\frac{2s}{k}}}{2}-ks-\frac{k^2}{2}.$$

seriem conversa dat

$$fx=\frac{s^2}{2}+\frac{s^3}{3k}+\frac{s^4}{6k^2}+\frac{s^5}{15k^3}+\frac{s^6}{45k^4}+\text{etc.}$$

SCHOLION 2

his exemplis invenimus curvas tautochronas pro medio, uplicata ratione celeritatum, eae ita sunt comparatae, ut sint dissimiles. Cum igitur omnes descensus super curva unt, sequentes semioscillationes, quae in curva NA inci-tautochronae, id quod in causa est, quod hae curvae ad m accommodari nequeant. Huic autem incommodo re-si huiusmodi curvarum MA et NA par inveniretur, quae miles et aequales; hoc enim casu perinde super utraque ri posset. Dubium quoque nullum est, quin talis casus ventio, quia hae duae curvae forte non erunt continuae, ropositionem potius pertinet. Indagari scilicet debet curva espondens curva ascensuum similis et aequalis sit; haec b defectum analyseos ita est difficilis, ut dubitem, num gnem analyseos promotionem ad hunc scopum pertingere

possit. Haec vero quaestio huc reducitur, ut investigen
et x huius conditionis, ut, si in ea ponatur

$$-2kl\left(e^{\frac{s}{2k}} - \frac{1}{k}\sqrt{2f}\int e^{\frac{s}{k}}dx\right)$$

loco s et

$$\int \frac{dx}{\left(1 - \frac{1}{k}e^{\frac{-s}{2k}}\sqrt{2f}\int e^{\frac{s}{k}}dx\right)^2}$$

loco x, eadem prodeat aequatio, quae habebatur ante [§ 788]
haec multis modis facilior effici potest; attamen quomodo
non video. Si medium fuerit rarissimum, non difficile est
invenire, quo duae curvae MA et AN sint inter se similes
quidem ad finem perducto calculo hanc inveni aequationem

$$fdx = sds + \frac{s^3ds}{9k^2} \quad \text{seu} \quad fx = \frac{s^2}{2} + \frac{s^4}{36k^2};$$

quae curva simul ultra A continuata ramum habet AN si
arcui AM; quare pendulum in hac curva oscillans singul
absolvet aequalibus temporibus. Erit autem

$$s^2 = -9k^2 + 3k\sqrt{(9k^2 + 4fx)} \quad \text{et} \quad s = \sqrt{\left(-9k^2 + 3k\right.}$$

Quia vero k est quantitas valde magna, erit

$$s = \sqrt{2fx} - \frac{fx\sqrt{2fx}}{18k^2} \quad \text{atque} \quad ds = \frac{fdx}{\sqrt{2fx}} - \frac{fdx}{1}$$

Hincque fit

$$dy = dx\sqrt{\frac{f-2x}{2x}} - \frac{f^2dx}{12k^2}\sqrt{\frac{2x}{f-2x}}.$$

Ponatur $f = 2a$; erit

$$y = \int dx\sqrt{\frac{a-x}{x}} - \int\frac{a^2dx}{3k^2}\sqrt{\frac{x}{a-x}} = \int\frac{adx - xdx}{\sqrt{(ax-xx)}} - \int$$

$$= \left(1 + \frac{a^2}{3k^2}\right)\sqrt{(ax-xx)} + \left(1 - \frac{a^2}{3k^2}\right)\int\frac{\frac{1}{2}ad}{\sqrt{(ax-}}$$

Quae ergo curva eodem fere modo quo cyclois describi
tionis circuli.

COROLLARIUM 5

i sumatur $a = k\sqrt{3}$ seu $f = 2k\sqrt{3}$, curva haec abit in ellipsin, horizontalis est duplo maior quam verticalis, qui est $= k\sqrt{3}$. Fieri , ut ellipsis sit tautochrona in fluido rarissimo atque magis satis- a cyclois.

SCHOLION 3

onstructio autem curvae tautochronae in medio rarissimo in prae- olio datae est, ut sequitur: Super recta verticali $AB = a = \frac{1}{2}f$ scribatur semicirculus AOB et ex hoc super basi BD cyclois AFD; n inverso situ describatur AGD. Quibus factis curva quaesita truetur sumendis ubique eius applicatis

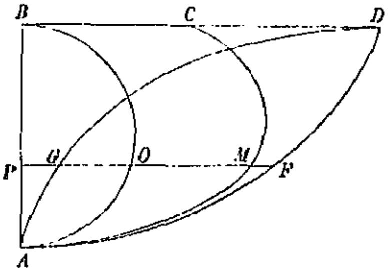


Fig. 88.

$$PM = PF - \frac{a^2}{3k^2}PG;$$

curvae infinita puncta cognoscuntur. accipi potest

$$= \left(1 + \frac{a^2}{3k^2}\right) PO + \left(1 - \frac{a^2}{3k^2}\right) AO,$$

oide non sit opus. Curva autem haec alicubi habebit tangentem seu applicatam PM maximam, quae invenitur posito $dy = 0$. Pro- n

$$\frac{a-x}{x} = \frac{a^2}{3k^2} \quad \text{seu} \quad x = \frac{3ak^2}{a^2+3k^2};$$

si AP aequalis capiatur, invenietur applicata maxima.

PROPOSITIO 89

PROBLEMA

In hypothesi gravitatis uniformis deorsum tendentis g data curva qua- (Fig. 89, p. 412) *pro descensibus in vacuo invenire curvam AM pro in medio resistente uniformi in duplicata ratione celeritatum huius omnes descensus super MA sint isochroni respective omnibus descensibus si celeritates in punctis imis a et A fuerint aequales.*

SOLUTIO

Sit pro curva descensuum in vacuo am abscissa $ap=t$, arc
pro curva vero descensuum in medio resistente sit $AP=x$ et A
sistentiae vero exponens ponatu
considerentur bini descensus supe
in quibus celeritates in A et
sint aequales et debitae altitud
ergo tempus descensus in vacuo

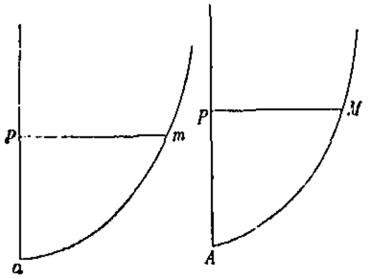


Fig. 89.

$$=\int\frac{dr}{\sqrt{(b-gt)}},$$

si post integrationem ponatur
pro tempore descensus in medio resistente super curva MA hab

$$\int\frac{ds}{e^{\frac{s}{2k}}\sqrt{\left(b-g\int e^{\frac{-s}{k}}dx\right)}},$$

si item post integrationem ponatur

$$g\int e^{\frac{-s}{k}}dx=b.$$

Quamobrem haec tempora erunt aequalia, si fuerit

$$\frac{ds}{e^{\frac{s}{2k}}}=dr \quad \text{et} \quad \int e^{\frac{-s}{k}}dx=t;$$

his enim positis pro utroque tempore habebitur eadem expressio

$$\int\frac{dr}{\sqrt{(b-gt)}}.$$

Cum igitur sit $\frac{ds}{e^{\frac{s}{2k}}}=dr$, erit integrando

$$2k\left(1-e^{\frac{-s}{2k}}\right)=r \quad \text{atque} \quad e^{\frac{-s}{2k}}=\frac{2k-r}{2k};$$

unde prodit

$$s=2kl\frac{2k}{2k-r}.$$

o aequatio $\int e^{\frac{-s}{k}} dx = t$ dat

$$e^{\frac{-s}{k}} dx = dt.$$

$$e^{\frac{-s}{k}} = \frac{(2k-r)^2}{4k^2},$$

substituto habetur

$$dx = \frac{4k^2 dt}{(2k-r)^2},$$

tur

$$x = \int \frac{4k^2 dt}{(2k-r)^2}.$$

aequatione inter t et r pro curva am ope duarum harum aequa-
ibus s et x per t et r determinantur, construi poterit curva quae-
Aequatio vero inter x et s commodius invenietur ex data aequa-
t et r, si in ea loco r substituatur $2k\left(1 - e^{\frac{-s}{2k}}\right)$ et $\int e^{\frac{-s}{k}} dx$ loco t.

COROLLARIUM 1

Circa punctum infimum a, ubi t et r sunt quantitates evane-

$$s = r + \frac{r^2}{4k} \quad \text{et} \quad x = t + \int \frac{r\,dt}{k}$$

$$ds = dr + \frac{r\,dr}{2k} \quad \text{et} \quad dx = dt + \frac{r\,dt}{k}.$$

natio curvae MA ad axem in A aequalis erit inclinationi curvae

COROLLARIUM 2

orro radius osculi in puncto infimo a, si tangens fuerit hori-
$= \frac{r\,dr}{dt}$ et in A, quia tangens quoque erit horizontalis,

$$= \frac{s\,ds}{dx} = \frac{r\,dr + \frac{3r^2 dr}{4k}}{dt + \frac{r\,dt}{k}}.$$

Erit ergo

$$\frac{sds}{dx} = \frac{rdr}{dt} - \frac{r^2dr}{4kdt} = \frac{rdr}{dt}\left(1 - \frac{r}{4k}\right).$$

Quare ob r infinite parvum erit

$$\frac{sds}{dx} = \frac{rdr}{dt}.$$

COROLLARIUM 3

814. Si ergo curva ma in a habuerit tangentem horizonta curvae MA tangens in A quoque horizontalis atque radius osc aequalis erit radio osculi in a.

COROLLARIUM 4

815. Si igitur in vacuo inventa fuerit curva ma, in qua tem scensuum quamcunque habeant relationem ad celeritates in a idem problema pro medio resistente solvetur curva MA, quae p ratione ex curva ma construitur.

COROLLARIUM 5

816. Si igitur curva ma fuerit cycloïs seu tautochrona in va erit tautochrona descensuum in medio resistente supra inventa. Po $r^2 = 2at$ seu $rdr = adt$ prodibit substitutis loco r et t inventis valo aequatio

$$2ke^{\frac{-s}{2k}}ds\left(1 - e^{\frac{-s}{2k}}\right) = ae^{\frac{-s}{k}}dx \quad \text{seu} \quad adx = 2kds\left(e^{\frac{s}{2k}} - 1\right).$$

EXEMPLUM

817. Sit am linea recta utcunque inclinata, ita ut sit $r =$ tempus descensus, quo celeritas altitudini b debita generatur,

$$= \int \frac{ndt}{\sqrt{(b - gt)}} = \frac{2n\sqrt{b}}{g}.$$

Eandem ergo habebit proprietatem curva MA, ut tempus cuiusque in medio resistente, quo celeritas $\sqrt{b}$ generatur, sit $= \frac{2n\sqrt{b}}{g}$ seu pro

ati genitae. Cum autem sit $r = nt$, erit $dr = ndt$; in qua si loco alores inventi substituantur, prodibit

$$e^{\frac{s}{2k}} ds = n e^{-\frac{s}{k}} dx \quad \text{seu} \quad n dx = e^{\frac{3s}{2k}} ds;$$

aequatio pro tractoria filo longitudinis $2k$ generata, qualis reprae- n fig. 86, p. 381, *nempe curva* CA, quae in A cam habet incli- quam recta data ma.

SCHOLION 1

Quemadmodum hic curva MA est determinata, super qua omnes n medio resistente iisdem absolvuntur temporibus quibus descensus uper curva ma, si celeritates ultimae in A et a fuerint aequales. modo curva MA potest definiri, super qua omnes ascensus in stente iisdem temporibus absolvuntur quibus similes iisdem celeri- ipientes ascensus in vacuo super curva am. Nam cum in medio descensus in ascensum mutetur facto k negativo, si ponantur $AM = s$, habebitur

$$x = \int \frac{4k^2 dt}{(2k+r)^2} \quad \text{et} \quad s = 2k\, l\, \frac{2k+r}{2k}$$

$$t = \int e^{\frac{s}{k}} dx \quad \text{et} \quad r = 2k\left(e^{\frac{s}{2k}} - 1\right).$$

tum facile curva AM potest construi et aequatio pro ea inveniri.

SCHOLION 2

n hoc problemate ex curva descensuum in vacuo data determina- am descensuum in medio resistente. Facile autem apparet vicissim rva AM pro medio resistente alteram am pro vacuo inveniri posse. sit

$$r = 2k\left(1 - e^{-\frac{s}{2k}}\right) \quad \text{et} \quad t = \int e^{-\frac{s}{k}} dx,$$

curvae am ope harum duarum aequationum perficitur. Aequatio urva am inter t et r commodius ex data aequatione inter x et s si in ea loco x substituatur $\int \frac{4k^2 dt}{(2k-r)^2}$ et $2k\, l\, \frac{2k}{2k-r}$ loco s. Quod ea de descensibus dictum est, idem de ascensibus valet, si modo k gativum, uti in scholio 1 monuimus.

SCHOLION 3

820. Tradita hic inventio alterius curvae duarum am et A etiam locum habet, si datae curvae non habeatur aequatio, sed cunque fuerit ducta; ex formulis enim structio potest deduci, quae ab aequatione pendeat. Quamobrem cum in capite praec in casum inciderimus pro vacuo, quo curva invenimus cum data ac iungendam, ut om ex quovis puncto curvae cm usque ad absolvantur temporibus, similia exempl medio resistente erui poterunt, quibus li bus duarum diversarum curvarum compos chrona. Si enim curva acm fuerit huiu tautochrona pro vacuo, ex ea per solu

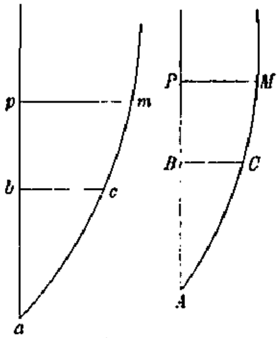


Fig. 90.

problematis similis curva composita pro medio resistente invenie ex ac methodo tradita curva AC definiatur; qua inventa posito b et $BP = x$ atque $CM = s$ et praeterea $ab = a$, $ac = c$ et $AB =$ tum enim, cum data sit aequatio inter t et r, erit

$$AP = A + x = \int \frac{4k^2 dt}{(2k - c - r)^2}$$

et

$$AM = C + s = 2kl \frac{2k}{2k - c - r}.$$

At si pro medio resistente data fuerit curva AC atque requirat eius proprietatis, ut omnes descensus super MCA aequalibus temporibus, solutio non dissimili modo efficietur. Nam ex da pro medio resistente inveniatur curva eiusdem proprietatis pro scholion 2. Qua inventa quaeratur curva cm ei adiungenda, descensus in vacuo isochronos producat (§ 432). Denique m tradita ex curva composita acm pro vacuo quaeratur similis cur pro medio resistente ACM, cuius quidem pars AC iam est cog ex ea lineam ac definivimus. Idem ergo problema, quod in vac se habebat difficultatis, in medio quoque resistente resolvitur. caput hoc finiens Lectorem benevolum rogo, ut, antequam ad c progrediatur, quae in capite I ab § 58 usque ad finem capitis repetere velit.

CAPUT QUARTUM

DE MOTU PUNCTI SUPER DATA SUPERFICIE

PROPOSITIO 90

PROBLEMA

821. *Data via in superficie quacunque $Mm\mu$* (Fig. 91) *invenire eius p*
respectu plani dati APQ et radii osculi illius viae in M tam posit
m longitudinem nec non normalis in superficiem situm.

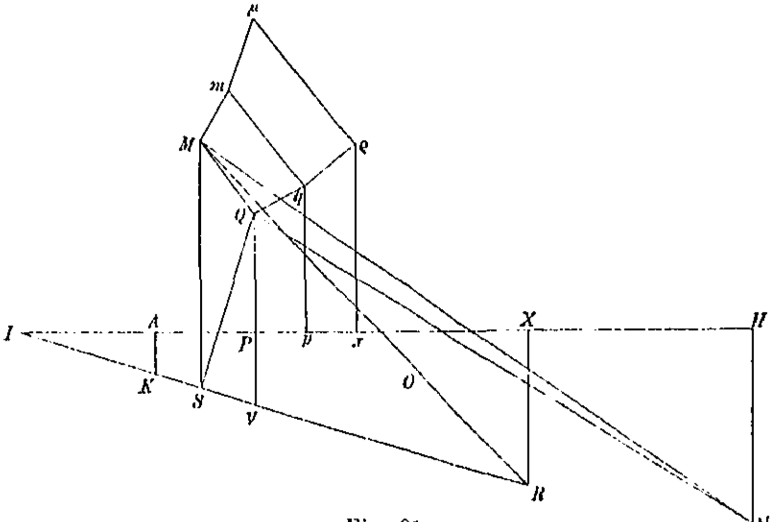


Fig. 91.

SOLUTIO

Sumto pro lubitu plano APQ in eoque axe AP, quorum respectu
o curvae $Mm\mu$ sit determinanda, ex tribus punctis proximis M, m

ae viae in superficie in planum APQ demittantur perpendicula MQ, atque ex punctis Q, q, ϱ ad axem AP perpendicula QP, qp et sito nunc initio abscissarum in A sit $AP = x$, $PQ = y$ et $QM = z$. rro superficies data ponitur, dabitur aequatio eius naturam exprimens i s has variabiles x, y et z; quae aequatio sit haec

$$dz = Pdx + Qdy.$$

n hac aequatione si coniungatur alia aequatio, exprimetur linea quaed ista superficie existens; quare, cum linea $Mm\mu$ data ponatur, dab eter aequationem $dz = Pdx + Qdy$ insuper alia aequatio, qua curva M erminatur, quam autem hic repraesentare non est opus. Sint eleme scissae Pp, $p\pi = dx$ inter se aequalia seu sumatur elementum dx ns. Erit ergo

$$pq = y + dy, \quad \pi\varrho = y + 2dy + ddy$$

que

$$qm = z + dz \quad \text{et} \quad \varrho\mu = z + 2dz + ddz.$$

s positis sit MN normalis in superficiem in puncto M et N punct o haec normalis plano APQ occurrit; demittatur ex N in axem perpe um NH; erit

$$AH = x + Pz \quad \text{et} \quad HN = -Qz - y$$

68). Sit nunc MR positio radii osculi curvae $Mm\mu$ et R incidentia planum APQ; erit ex R in axem demisso perpendiculo RX

$$AX = \frac{zdx(dyddy + dzddz)}{(dx^2 + dy^2)ddz - dydzddy} + x$$

que

$$XR = \frac{zdx^2ddy + zdz(dzddy - dyddz)}{(dx^2 + dy^2)ddz - dydzddy} - y$$

68). Longitudo vero radii osculi, scilicet MO,

$$= \frac{(dx^2 + dy^2 + dz^2)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{(dx^2(ddy^2 + ddz^2) + (dyddz - dzddy)^2)}}$$

72). Denique concipiatur planum, in quo sita sunt elementa Mm, oductum, donec planum APQ intersecet, sitque intersectio recta RKI,

ecta perpendicularis in K occurrat et ex P in V; inventum est e

$$PV = \frac{zddy}{ddz} - y$$

um nunc sit $XR - PV : AX - AP = PV : PI$, erit

$$PI = \frac{(AX - AP)PV}{XR - PV}.$$

$$AX - AP = \frac{zdx(dyddy + dzddz)}{(dx^2 + dy^2)ddz - dydzddy}$$

$$XR - PV = \frac{zddyddz(dz^2 - dy^2) + zdydz(ddy^2 - ddz^2)}{ddz((dx^2 + dy^2)ddz - dydzddy)}.$$

bstitutis erit

$$PI = \frac{dx(dyddy + dzddz)(zddy - yddz)}{ddyddz(dz^2 - dy^2) + dydz(ddy^2 - ddz^2)} = \frac{zdxddy - ydxddz}{dzddy - dyddz}$$

$$AI = PI - AP = \frac{zdxddy - ydxddz - xdzddy + xdyddz}{dzddy - dyddz}.$$

ritur

$$AK = \frac{PV \cdot AI}{PI} = \frac{zdxddy - ydxddz - xdzddy + xdyddz}{dxddz}.$$

, in quo sita sunt elementa Mm et $m\mu$, inclinatio ad planum APQ demittenda ex Q perpendiculari QS ad intersectionem RI; erit gens anguli inclinationis $= \frac{QM}{QS}$. At cum sit $IV : PI = QV : QS$, angens

$$= \frac{QM \cdot IV}{PI \cdot QV} = \frac{\sqrt{(dx^2ddz^2 + (dzddy - dyddz)^2)}}{dxddy}.$$

ro NMR, quem radius osculi cum normali in superficiem constituit, st

$$= \frac{ddy(dx + Pdz) - ddz(Pdy - Qdx)}{(ddz - Qddy)\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}}$$

Ex his igitur omnia deduci possunt, quae ad positionem curvae gnoscendam requiruntur. Q. E. I.

COROLLARIUM 1

822. Curvae $Mm\mu$ proiectio in plano APQ est curva $Qq\varrho$,
exprimitur aequatione inter x et y. Quare ista proiectio habeb
aequationum $dz = Pdx + Qdy$ et eius, qua ipsa curva in superfic
terminatur, nova formetur aequatio eliminanda variabili z, qua
et y tantum.

COROLLARIUM 2

823. Simili modo, si eliminetur x, ut prodeat aequatio inter
aequatione definietur proiectio curvae $Mm\mu$ in plano, quod est
axem AX. Atque aequatio, in qua non inest y, sed tantum x
proiectionem curvae $Mm\mu$ in plano, quod normaliter planum AP
axem AX intersecat.

COROLLARIUM 3

824. Curvae autem $Mm\mu$ natura ex duabus eius proiectioni
bus planis invicem normalibus distincte cognoscitur. Qualem
quoque suppeditat unica proiectio una cum ipsa superficie.

COROLLARIUM 4

825. Quamobrem ad curvam in superficie data quamcunque e
designandam requiritur, ut praeter aequationem $dz = Pdx + Qdy$,
ficies determinatur, detur aequatio duas tantum variabiles involve
iectione quapiam curvae $Mm\mu$.

COROLLARIUM 5

826. Si superficies secetur plano, simili modo, quo conus
conicas producendas secari solet, curva ex hac sectione orta or
plano. Quare his casibus tam positio rectae IR erit constans
IMR inclinatio ad planum APQ.

EXEMPLUM

827. Si igitur detur superficies quaecunque eaque secetur p
quaeratur curva hac sectione orta. Ad hoc ponatur $AI = a$,

inationis plani JMR ad planum APQ tangens $= m$; eritque

$$\frac{xddy - ydxddz}{zddy - dyddz} - x \quad \text{et} \quad b = \frac{zdxddy - ydxddz - xdzddy + xdyddz}{dxddz}$$

$$m = \frac{\sqrt{(dx^2 ddz^2 + (dzddy - dyddz)^2)}}{dxddy}.$$

aequationibus coniunctis cum $dz = Pdx + Qdy$ natura curvae hac enitae determinabitur. Ex prioribus vero duabus aequationibus

$$\frac{b}{a} = \frac{dzddy - dyddz}{dxddz} \quad \text{seu} \quad ddz : ddy = adz : bdx + ady;$$

ationis integralis est

$$\frac{1}{a} ldz = \frac{1}{a} l(bdx + ady) - \frac{1}{a} lc \quad \text{seu} \quad cdz = bdx + ady$$

$$cz = bx + ay + ff.$$

vero aequatione si loco ddz et ddy eorum proportionalia substitudibit

$$= \frac{bzdx + azdy - aydz}{bdz} \quad \text{seu} \quad abdz + bxdz = bzdx + azdy - aydz,$$

zz divisae integralis est haec

$$c - \frac{ab}{z} = \frac{bx + ay}{z} \quad \text{seu} \quad cz = bx + ay + ab;$$

ante erat ff, hic est ab, seu $ff = ab$. Constantem vero c tertia lefiniet; erit autem

$$m = \frac{dz\sqrt{(a^2 + b^2)}}{bdx + ady} \quad \text{seu} \quad \frac{dz\sqrt{(a^2 + b^2)}}{m} = ady + bdx.$$

superior littera

$$c = \frac{\sqrt{(a^2 + b^2)}}{m}$$

atque praeter aequationem superficiei naturam exprimentem h

$$\frac{z\sqrt{(a^2+b^2)}}{m} = bx + ay + ab,$$

ex quibus natura quaesitae curvae est derivanda. Quia aut
quaesita est in plano IMR, commodissime ea exprimetur a
coordinatas orthogonales in eodem plano sumtas. Sumto org
ex M in eum demittatur perpendiculum MS et vocetur $IS =$
Est vero $IA : AK = IP : PV$ seu

$$PV = \frac{ab+bx}{a}$$

et

$$QV = \frac{ab+bx+ay}{a} = \frac{z\sqrt{(a^2+b^2)}}{ma}.$$

Porro est

$$\sqrt{(a^2+b^2)} : a = \frac{z\sqrt{(a^2+b^2)}}{ma} : QS;$$

quare erit

$$QS = \frac{z}{m} \quad \text{et} \quad SV = \frac{bz}{ma}.$$

Ex his prodibit

$$MS = u = \frac{z\sqrt{(1+m^2)}}{m} \quad \text{atque} \quad IS = t = \frac{m(a+x)\sqrt{(a^2+}}{ma}$$

Ex quo oritur

$$z = \frac{mu}{\sqrt{(1+m^2)}} \quad \text{et} \quad x = \frac{bu+at\sqrt{(1+m^2)}}{\sqrt{(a^2+b^2)(1+m^2)}} - a$$

et substitutis his valoribus in aequatione $\frac{z\sqrt{(a^2+b^2)}}{m} = bx + a$

$$y = \frac{au - bt\sqrt{(1+m^2)}}{\sqrt{(1+m^2)(a^2+b^2)}}.$$

His igitur valoribus loco x, y et z in aequatione super
proveniet aequatio inter t et u seu coordinatas orthogonal
sitae.

COROLLARIUM 6

intersectio plani secantis IR in ipsum axem AX incidat suma-
A, erit

$$z = \frac{mu}{\sqrt{(1+m^2)}}, \quad y = \frac{u}{\sqrt{(1+m^2)}} \quad \text{et} \quad x = t.$$

COROLLARIUM 7

intersectio IR plani secantis IMR cum plano APQ fuerit nor-
em AX, erit $b = \infty$. Quare prodibunt

$$z = \frac{mu}{\sqrt{(1+m^2)}}, \quad x = \frac{u}{\sqrt{(1+m^2)}} - a \quad \text{et} \quad y = -t.$$

COROLLARIUM 8

m valores loco z, y et x substituendi sint unius dimensionis
u, perspicuum est aequationem inter t et u non plures habere
iones quam ipsam aequationem inter z, y et x.

COROLLARIUM 9

re si aequatio inter z, y et x fuerit duarum dimensionum, cuius-
conicam innumerabiles dantur superficies, omnes sectiones plano
sectiones conicae.

SCHOLION

Comment. Tom. III. ea dissertatione, in qua lineam brevissimam
quacunque determinavi, tria praecipue superficierum genera sum
ae erant cylindrica, conica et tornata seu rotunda.[1])

vero generalis $dz = Pdx + Qdy$ dat superficies cylindricas, si
t Q tantum ab y et z pendeat, ita ut aequationem pro hoc super-

1) ...m Commentatio 9 (indicis Eneströmiani): *De linea brevissima in superficie qua-*
libet puncta iungente, Comment. acad. sc. Petrop. 8 (1728), 1732, p. 110;
...i *Opera omnia*, series I, vol. 25. P. St.

ficierum genere abscissa x non ingrediatur; omnes enim sectiones parallelae sunt quoque aequales; pro his ergo est aequatio

$$dz = Qdy.$$

Ad genus conoidicum refero omnes eas superficies, quae ducendis rectis ex singulis curvae cuiuspiam punctis ad punctum planum eius curvae situm. Quae superficies hanc habent propr omnes sectiones parallelae sint inter se similes earumque latora distantiae sectionum a vertice coni. Aequationes vero pro huius ficiebus, si quidem vertex coni fuerit in A, ita sunt comparatae, coniunctim ubique eundem dimensionum numerum constituant.

Superficies denique tornatae seu rotundae mihi sunt, quae conversione cuiuscunque curvae circa axem; qui axis si fuerit A constante aequatio inter y et z dabit circulum centri P. Quare iis hanc habebit formam

$$dz = Pdx - \frac{ydy}{z} \quad \text{seu} \quad zdz + ydy = zPdx,$$

ubi Pz ab x tantum pendet; seu est

$$Q = -\frac{y}{z} \quad \text{et} \quad P = \frac{X}{z}$$

existente X functione ipsius x.

Quemadmodum autem in his superficiebus tornatis omnes normales sunt circuli, ita tales superficies concipi possunt, quar axi normales sint curvae quaecunque similes. Tales superficies continebuntur proprietate generali, ut functio quaecunque ipsiu sit functioni eiusdem ubique dimensionum ipsarum y et z numeri dimensionum numerus fuerit n, aequationis $Pdx = Rdz + Qdy$ erit proprietas, ut sit

$$Rz + Qy = n\int Pdx \quad \text{vel} \quad Rdz + Qdy = \frac{zdR + ydQ}{n-1}.$$

Ex quo, an data aequatio sit ad huiusmodi superficiem, statim co

1) Vide notam p. 44. P. St.

PROPOSITIO 91

PROBLEMA

ficie quacunque data lineam determinare, quam corpus in ea otentiis sollicitatum describit tam in vacuo quam in medio quo-

SOLUTIO

nullis potentiis absolutis sollicitari ponitur, linea ab eo pta erit linea brevissima in vacuo (§ 62). Medii autem itatem corporis tantum imminuit neque directionem ullo etiam in medio resistente via a corpore in quavis super- pariter brevissima. Manentibus igitur ut ante $AP = x$, z (Fig. 91, p. 417) sit $dz = Pdx + Qdy$ aequatio superficiei atque Mm, $m\mu$ duo lineae brevissimae cuiuspiam ele- ora pro linea brevissima inventa est haec aequatio

$$Pdzddy + dxddy = Pdyddz - Qdxddz$$

$$ddz = \frac{(Pdz + dx)ddy}{Pdy - Qdx}.$$

perficiem differentiata dat

$$ddz = dPdx + Qddy + dQdy,$$

s fit

$$\ldots dx)(dPdx + dQdy) \over \ldots 1 + P^2 + Q^2) \quad \text{et} \quad ddz = \frac{(Pdz + dx)(dPdx + dQdy)}{dx(1 + P^2 + Q^2)}.$$

Mm sequens $m\mu$ in linea brevissima invenietur; erit enim

$$\ldots PQ + 2dy + ddy \quad \text{et} \quad \varrho\mu = QM + 2dz + ddz$$

ddz valores sunt inventi. Quare hinc sequentis cuiusque eterminatur atque ipsius lineae brevissimae natura per roiectionem cognoscitur. Q. E. I.

COROLLARIUM 1

834. Si in aequatione pro superficie P et Q tantum per x et y d
aequatio

$$ddy = \frac{(Pdy - Qdx)(dPdx + dQdy)}{dx(1 + P^2 + Q^2)}$$

proiectionem lineae brevissimae in plano APQ denotat.

COROLLARIUM 2

835. Pro linea ergo brevissima $Mm\mu$ sumtis elementis axis ae
bus erit

$$\pi\varrho = y + 2dy + \frac{(Pdy - Qdx)(dPdx + dQdy)}{dx(1 + P^2 + Q^2)}$$

atque

$$\varrho\mu = z + 2dz + \frac{(Pdz + dx)(dPdx + dQdy)}{dx(1 + P^2 + Q^2)},$$

ex quibus aequationibus punctum μ ex duobus praecedentibus M et
gnoscitur.

COROLLARIUM 3

836. Quia pro linea brevissima angulus RMN evanescit (§ 71), in
R in N; positio ergo radii osculi ita se habebit, ut sit $AX = x +$
$XR = -Qz - y$. Longitudo vero radii osculi erit [§ 73]

$$= -\frac{(dx^2 + dy^2 + dz^2)\sqrt{(1 + P^2 + Q^2)}}{dPdx + dQdy}.$$

COROLLARIUM 4

837. Planum vero IMR, in quo sita sunt elementa lineae breviss
$Mm\mu$, ita determinabitur, ut sit

$$AI = -x + \frac{y(dx + Pdz) - z(Pdy - Qdx)}{Qdz + dy}$$

et

$$AK = -y + \frac{z(Pdy - Qdx) + x(dy + Qdz)}{dx + Pdz}.$$

vero anguli, quem planum IMR cum plano APQ constituit, erit

$$=\frac{\sqrt{((dx+Pdz)^2+(dy+Qdz)^2)}}{Pdy-Qdx}.$$

anguli secans est

$$=\frac{\sqrt{(1+P^2+Q^2)(dx^2+dy^2+dz^2)}}{Pdy-Qdx}$$

s

$$=\frac{Pdy-Qdx}{\sqrt{(1+P^2+Q^2)(dx^2+dy^2+dz^2)}}.$$

EXEMPLUM 1

Sit superficies cylindrica quaecunque axem habens AP; exprimetur a hac aequatione $dz=Qdy$ evanescente P in generali aequatione $+Qdy$. Quare pro proiectione lineae brevissimae huius superficiei APQ habebitur ob $P=0$ et $dP=0$ haec aequatio

$$ddy=\frac{-QdQdy}{1+Q^2}$$

$$l\frac{adx}{dy}=l\sqrt{(1+Q^2)}\quad\text{et}\quad adx=dy\sqrt{(1+Q^2)},$$

Q tantum per y detur; at si Q per y et z detur, variabilis z est ope aequationis $dz=Qdy$. Uti in cylindro circulari, in quo est ^{2}, erit

$$z=\sqrt{(a^2-y^2)}\quad\text{et}\quad Q=\frac{-y}{\sqrt{(a^2-y^2)}}.$$

$$adx=\frac{ady}{\sqrt{(a^2-y^2)}}.$$

autem $\int dy\sqrt{(1+Q^2)}$ exprimit arcum sectionis ad axem AP norro dicto hoc arcu $=s$ erit $ax=s$. Ex quo intelligitur, si talis in planum explicetur, fore lineam brevissimam rectam; uti

EXEMPLUM 2

839. Sit superficies proposita conica quaecunque verticem habens i
aequatio pro tali superficie ita poterit adaptari, ut z aequetur functioni
dimensionis ipsarum x et y. Quare in aequatione $dz = Pdx + Qdy$ lit
P et Q erunt functiones nullius dimensionis ipsarum x et y. Hanc ob
uti iam alibi[1]) ostendi, erit

$$Px + Qy = 0 \quad \text{seu} \quad Q = \frac{-Px}{y};$$

unde fiet

$$dQ = \frac{Pxdy - Pydx - yxdP}{y^2} \quad \text{et} \quad Pdy - Qdx = \frac{P(ydy + xdx)}{y}$$

atque

$$dPdx + dQdy = \frac{y^2 dPdx + Pxdy^2 - Pydxdy - yxdPdy}{y^2} = \frac{(ydx - xdy)(ydP - \ldots}{y^2}$$

et tandem

$$1 + P^2 + Q^2 = \frac{y^2 + P^2y^2 + P^2x^2}{y^2}.$$

Quibus substitutis erit

$$ddy = \frac{P(ydy + xdx)(ydx - xdy)(ydP - Pdy)}{ydx(y^2 + P^2y^2 + P^2x^2)}.$$

Ponatur $y = px$; aequabitur P functioni cuidam ipsius p tantum, quia
functio nullius dimensionis ipsarum x et y. Erit vero

$$dy = pdx + xdp$$

et

$$ddy = xddp + 2dxdp = -\frac{P(p^2xdx + px^2dp + xdx)(pxdP - Ppdx - Pxdp)}{px^3dx(p^2 + P^2p^2 + P^2)}$$

$$= \frac{Pdp(p^2dx + pxdp + dx)(Ppdx + Pxdp - pxdP)}{pdx(p^2 + P^2 + P^2p^2)}.$$

Ex qua aequatione quidem proiectio difficulter cognoscitur. Quomodo a
linea brevissima in tali superficie sit determinanda, fusius docui in Comm
III. p. 120.[2]) Ceterum idem de linea brevissima est notandum quod
scilicet quod ea in planum explicata superficie conica abeat in rectam.

---

1) Vide notam p. 44. P. St.

2) Vide notam p. 423. P. St.

SCHOLION

nodo in determinandis lineis brevissimis super aliis super-
non hic immoror, quia in citato loco hanc materiam plenius
ior ergo ad investigationem linearum, quae in superficie a
cunque potentiis sollicitato describuntur. Antea vero necesse
s cuiusque potentiae curatius inquiramus.

DEFINITIO 4

ementem vocabimus in sequentibus eam vim normalem, cuius di- ad ipsam superficiem, in qua corpus movetur.

COROLLARIUM

is premens ergo vel auget vim centrifugam vel minuit, prout ectioni radii osculi lineae brevissimae vel contraria est vel § 79).

DEFINITIO 5

leflectentem vocabimus in sequentibus eam vim normalem, cuius lano superficiem tangente et perpendicularis in viam a corpore

COROLLARIUM

orgo vis corpus a linea brevissima, quam a nullis potentiis criberet, deflectit et vel cis vel ultra eam detrahit pro eius is vel ultra tendente.

PROPOSITIO 92

PROBLEMA

ninare effectum vis prementis in corpus super superficie quacunque ıcterea a nullis potentiis sollicitatur.

SOLUTIO

vis premens est normalis in superficiem ideoque eius directio . 417), ea neque celeritatem neque directionem motus afficiet,

sed tota in pressione superficiei consumetur; corpus igitur in
progredietur, in qua, si haec vis abesset, moveretur; quae auto
brevissima in propositione praecedente determinata. Movebitur
in linea $Mm\mu$, cuius radius osculi MO incidet in normalem sup
Sit ergo MN directio huius potentiae prementis, quae propterea
versus interiora secundum MN premet. Ponatur haec vis pre
premetur ab ea superficies secundum MN vi $= M$. At si radius
in eandem plagam incidere ponatur, vis centrifuga vi prementi e
eiusque effectum minuet. Cum autem $Mm\mu$ sit linea brevissima
osculi [§ 73]

$$MO = -\frac{(dx^2 + dy^2 + dz^2)\sqrt{(1 + P^2 + Q^2)}}{dPdx + dQdy};$$

per quem si dividatur dupla altitudo v celeritati in M debita,
centrifuga. Hanc ob rem erit vis, qua superficies secundum M

$$= + \frac{2v(dPdx + dQdy)}{(dx^2 + dy^2 + dz^2)\sqrt{(1 + P^2 + Q^2)}} + M.$$

Positio tandem huius vis prementis per superiora [§ 68] inventa

$$AH = x + Pz \quad \text{et} \quad HN = -Qz - y,$$

demisso scilicet ex puncto N, in quo normalis MN plano APQ
axem perpendiculo NH. Q. E. I.

COROLLARIUM 1

846. Cum neque altera vis normalis deflectens neque vis
neque vis resistentiae, si quae adest, pressionem in superficiem
spicitur, a quibuscunque potentiis corpus praeterea sollicitetur
semper tantam esse, quantam hic assignavimus.

COROLLARIUM 2

847. Quantumvis igitur via a corpore descripta a linea br
crepet, tamen pressio in superficiem fit secundum normalem i
seu secundum radium osculi lineae brevissimae, non vero sec
curvae descriptae radium osculi, cuius longitudo etiam ad pr
requiritur.

SCHOLION

causam eam radii osculi lineae brevissimae formulam ad- differentialia secundi gradus non insunt, ne is pendeat a elementorum Mm et $m\mu$, per quae corpus reipsa movetur. osculi ex unico elemento Mm innotescere debet; si enim m deflectentem non lineam brevissimam describat, differen- dus ddy et ddz non amplius in radium osculi lineae bre- debent.

PROPOSITIO 93

PROBLEMA

gentialis, quae secundum tangentem MT (Fig. 92) *corpus trahit, in superficie quacunque motum determinare.*

SOLUTIO

tangentialis $= T$ corpusque per elementum Mm progrediatur i v debita; quia haec vis motum diminuit, erit

$$= - T\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}$$

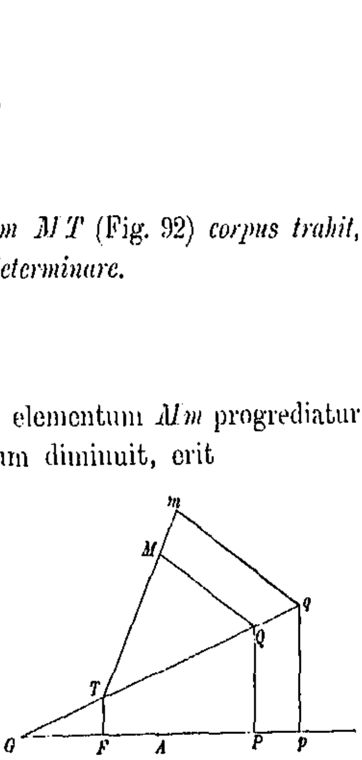


Fig. 92.

n denominationibus, quibus Praeterea vero haec vis neque deviationem a linea Ad positionem vero di- is inveniendam producatur nec occurrat plano APQ nctum in elemento qQ producto. Fiat ergo

$$dz : \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = z : QT$$

$$QT = \frac{z\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{dz}.$$

in axem perpendiculum TF; erit

$$\sqrt{(dx^2 + dy^2)} : dx = QT : PF;$$

quare habetur

$$PF = \frac{zdx}{dz} \quad \text{et} \quad AF = \frac{zdx - xdz}{dz}.$$

Porro ob $dx : dy = \frac{zdx}{dz} : y - FT$ erit

$$FT = y - \frac{zdy}{dz},$$

ex quo punctum T determinatur. Q. E. I.

COROLLARIUM

850. Cum resistentia ad vim tangentialem sit referenda, ex
gitur, quomodo resistentiae effectus sit determinandus. Ut si
stentia $= R$, erit

$$dv = -(T + R)\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}.$$

PROPOSITIO 94

PROBLEMA

851. *Vis normalis deflectentis N effectum in corpus super super*
que motum determinare.

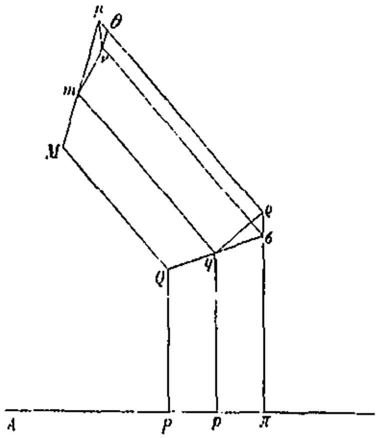


Fig. 93.

SOLUTIO

Positis ut ante $AP = x$,
$QM = z$ (Fig. 93) exprimatur
natura hac aequatione

$$dz = Pdx + Qdy$$

et moveatur corpus celeritate
debita per elementum Mm; q
nisi vis deflectens adesset, p
per elementum $m\mu$ secundum
vissimam foretque

$$\pi\varrho = y + 2dy + \frac{(Pdy - Qdx)(dPdx + dQdy)}{dx(1 + P^2 + Q^2)}$$

$$\varrho\mu = z + 2dz + \frac{(dx + Pdz)(dPdx + dQdy)}{dx(1 + P^2 + Q^2)}$$

cedat vis normalis deflectens N, quae directionem habeat
ergo vis efficiet, ut corpus descripto elemento Mm non
sed ab hac directione antrorsum deflectat. Ponamus igitur
erunt Mm et $m\nu$ duo elementa curvae a corpore descriptae.
ν in planum APQ perpendiculo $\nu\sigma$ erit

$$\ldots = y + 2dy + ddy \quad \text{et} \quad \sigma\nu = z + 2dz + ddz.$$

tur

$$\sigma\varrho = \frac{(Pdy - Qdx)(dPdx + dQdy)}{dx(1 + P^2 + Q^2)} - ddy$$

$$\mu\varrho - \nu\sigma = \frac{(dx + Pdz)(dPdx + dQdy)}{dx(1 + P^2 + Q^2)} - ddz.$$

tatis ergo

$$\ldots\frac{\ldots Pdx + dQdy)}{\ldots^2 + Q^2)} = dd\eta \quad \text{et} \quad \frac{(dx + Pdz)(dPdx + dQdy)}{dx(1 + P^2 + Q^2)} = dd\zeta$$

osculi angulo elementari $\mu m\nu$ respondens [§ 72]

$$\frac{(dx^2 + dy^2 + dz^2)^{\frac{3}{2}}}{\ldots dzddy - dydd\zeta + dyddz)^2 + dx^2(dd\eta - ddy)^2 + dx^2(dd\zeta - ddz)^2)}.$$

tur $= r$, erit $N = \frac{2v}{r}$ seu $2v = Nr$, quia hic angulus eodem
quo corpus a vi normali in plano a linea recta deflectitur.

$$\ldots zdd\eta - dydd\zeta = -\frac{(dy + Qdz)(dPdx + dQdy)}{1 + P^2 + Q^2}.$$

et $dd\zeta$ debitis valoribus substitutis fit

$$\frac{(dx^2 + dy^2 + dz^2)^{\frac{3}{2}}}{\ldots y^2 + ddz^2) + (dzddy - dyddz)^2 - \frac{(dx^2 + dy^2 + dz^2)(dPdx + dQdy)^2}{1 + P^2 + Q^2}\Big)}.$$

aequationem $dz = Pdx + Qdy$ sit

$$dPdx + dQdy = ddz - Qddy,$$

erit in subsidium hac ipsa aequatione $dz = Pdx + Qdy$ vocata

$$r = \frac{(dx^2 + dy^2 + dz^2)^{\frac{3}{2}} \sqrt{(1 + P^2 + Q^2)}}{-ddy(dx + Pdz) + ddz(Pdy - Qdx)}.$$

Hanc ob rem erit

$$ddz(Pdy - Qdx) - ddy(dx + Pdz) = \frac{N}{2v}(dx^2 + dy^2 + dz^2)^{\frac{3}{2}} \sqrt{(1 + P^2 +$$

Q. E. I.

SCHOLION 1

852. Congruit haec formula cum ea, quam supra (§ 79) pro effect modi vis determinando invenimus. Differentia enim tantum est in si terae N, quam vim ibi negative accipiendam esse apparet. Atque hi de signo non certi esse potuissemus, quia ex quantitate radix quadrata hic extraximus, aeque potest esse negativa ac affirmativa. Hoc vero si calculus ad casum specialem accommodetur, statim tollitur, quia eiusmodi esse debet, ut punctum ν cis μ cadat, si potentia N antror posuimus, fuerit directa. Ex quo ope exempli etiam signum radicis qu determinavi atque hanc ipsam formulam inveni.

COROLLARIUM 1

853. Si vis deflectens N evanescat, corpus motum suum in lin vissima continuabit; id quod ipsa aequatio quoque indicat. Posit $N = 0$ habebitur

$$ddy(dx + Pdz) = ddz(Pdy - Qdx),$$

quae aequatio est pro linea brevissima.

COROLLARIUM 2

854. Quaecunque ergo vis premens et vis tangentialis atque res corpus in superficie motum sollicitet, si modo nulla affuerit vis de corpus semper in linea brevissima movebitur.

SCHOLION 2

855. Quod autem ad positionem huius vis deflectentis N attinet, hoc deducetur, quod ea posita sit in plano tangente superficiem atque

ae descriptae; sit ergo MG (Fig. 94) eius directio et G plano APQ occurrit, ita ut vis N secundum MG trahere eam ante antrorsum

Primo ergo deter- rsectio plani super- tis cum plano APQ, VG; haec vero in- angentes superficiem usque producantur quibus in planum nea recta iungantur. ons lineae descriptae, orficiem quoque tan- nvenimus,

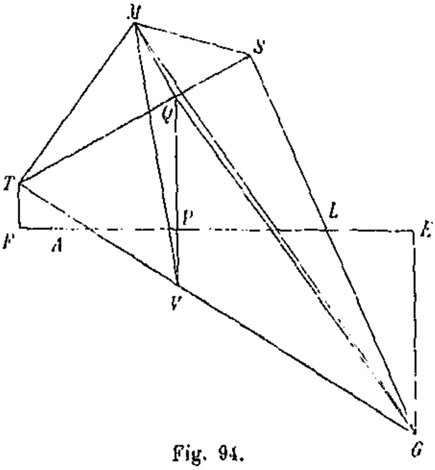


Fig. 94.

$$AF = \frac{zdx}{dz} - x \quad \text{et} \quad FT = y - \frac{zdy}{dz}$$

perficies secta intelligatur plano PQM sitque MV sectionis t

$$QV = \frac{z}{Q}$$

$= Pdx + Qdy$ posito $dx = 0$. Innotescit ergo punctum V, producta erit intersectio plani tangentis superficiem in M Punctum ergo G, in quo recta MG plano APQ occurrit, cta TV. Porro in recta TQ sumatur

$$QS = \frac{zdz}{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}$$

alis in elementum Mm descriptum. Atque si ad QS du- G, ex hac recta SG omnes rectae ad M ductae erunt in perpendiculares. Quare cum MG sit quoque normalis in tum, punctum G quoque positum erit in recta SG. Punc- n intersectione rectarum TV et SG. Est vero

$$PL = \frac{ydy + zdz}{dx}$$

et ang. $ELG =$ ang. PQT. Ponatur $GE = t$; erit

$$LE = \frac{tdy}{dx} \quad \text{et} \quad PE = \frac{ydy + tdy + zdz}{dx}.$$

Deinde etiam propter triangula similia est $FP : FT + PV = PE : GE$, hoc est

$$\frac{zdx}{dz} : \frac{z}{Q} - \frac{zdy}{dz} = \frac{ydy + tdy + zdz}{dx} : t - \frac{z}{Q} + y.$$

Hinc provenit

$$t = \frac{z(dx + Pdz)}{Qdx - Pdy} - y = GE \quad \text{et} \quad AE = x + \frac{z(dy + Qdz)}{Qdx - Pdy},$$

unde punctum G determinatur. Si ergo ducatur recta QG, erit

$$QG^2 = \frac{z^2(dx + Pdz)^2}{(Qdx - Pdy)^2} + \frac{z^2(dy + Qdz)^2}{(Qdx - Pdy)^2}$$

et

$$QG = \frac{z\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2 + dz^2(1 + P^2 + Q^2))}}{Qdx - Pdy}$$

atque ipsa

$$MG = \frac{z(dx^2 + dy^2 + dz^2)^{\frac{1}{2}}\sqrt{(1 + P^2 + Q^2)}}{Qdx - Pdy}.$$

PROPOSITIO 95

PROBLEMA

856. *Si corpus super superficie motum a quotcunque potentiis sollicitetur, definire vires normales, prementem scilicet et deflectentem, atque vim tangentialem ex resolutione omnium ortam.*

SOLUTIO

Quaecunque fuerint potentiae sollicitantes, eae ad tres reduci possunt, quarum directiones sint secundum tres coordinatas x, y, z. Sit nunc vis corpus in M (Fig. 92, p. 431) secundum parallelam abscissae PA trahens $= E$, vis secundum parallelam ipsi QP trahens $= F$ et vis secundum MQ trahens $= G$. Singulae ergo hae vires resolvendae sunt in ternas, normalem

scilicet, normalem deflectentem et tangentialem. Quia autem hae ctiones sunt inter se normales, ex quaque ipsarum E, F et G vires et tangentiales prodibunt, si illae ducantur in cosinum anguli, quem irium directiones cum istis constituunt.

piamus a vi tangentiali, cuius directio est MT, existente

$$AF = \frac{zdx}{dz} - x \quad \text{et} \quad FT = y - \frac{zdy}{dz}$$

$$QT = \frac{z\sqrt{(dx^2+dy^2)}}{dz} \quad \text{et} \quad MT = \frac{z\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}}{dz}.$$

cosinus anguli QMT, quem directio vis G cum vi tangentiali con-

$$= \frac{QM}{MT} = \frac{dz}{\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}}.$$

si ducatur vis G, prodibit vis tangentialis ex ea orta

$$= \frac{Gdz}{\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}}.$$

vero anguli, quem MT constituit cum directione vis F, quae est parallela, est

$$\cos. PQT. \sin. QMT^{1)} = \frac{PQ-FT}{QT} \cdot \frac{QT}{MT} = \frac{dy}{\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}}.$$

tangentialis ex F orta est

$$= \frac{Fdy}{\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}}.$$

orro anguli, quem directio vis E constituit cum MT, est

$$= \frac{dx}{\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}}$$

is tangentialis ex vi E orta

$$= \frac{Edx}{\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}}.$$

1) itio princeps: $\int QMT$; vide notam p. 62 T. I. P. St.

Iam consideretur (Fig. 91, p. 417) vis premens, cuius directio e
existente

$$AH = x + Pz \quad \text{et} \quad HN = -y - Qz$$

seu

$$PH = Pz \quad \text{et} \quad QP + HN = -Qz.$$

Ex quo erit

$$QN = z\sqrt{(P^2 + Q^2)} \quad \text{et} \quad MN = z\sqrt{(1 + P^2 + Q^2)}.$$

Anguli ergo, quem directio potentiae G cum MN constituit, cosinus

$$\frac{MQ}{NM} = \frac{1}{\sqrt{(1 + P^2 + Q^2)}}$$

ideoque vis premens ex G orta

$$= \frac{G}{\sqrt{(1 + P^2 + Q^2)}}.$$

Porro anguli, quem directio vis F, quae est parallela ipsi QP, c
constituit, cosinus est

$$= \cos. PQN.\ \sin. QMN^{1)} = \frac{(PQ + HN)QN}{QN \cdot MN} = -\frac{Q}{\sqrt{(1 + P^2 + Q^2)}}.$$

Ergo vis premens ex vi F orta est

$$= -\frac{FQ}{\sqrt{(1 + P^2 + Q^2)}}.$$

Atque simili modo (Fig. 94, p. 435) vis premens ex vi E orta est

$$= -\frac{EP}{\sqrt{(1 + P^2 + Q^2)}}.$$

Denique cum vis deflectentis directio sit MG atque

$$PE = \frac{z(dy + Qdz)}{Qdx - Pdy} \quad \text{et} \quad QP + EG = \frac{z(dx + Pdz)}{Qdx - Pdy},$$

erit anguli, quem MG cum directione vis G constituit, cosinus

$$= \frac{Qdx - Pdy}{(dx^2 + dy^2 + dz^2)^{\frac{1}{2}}\sqrt{(1 + P^2 + Q^2)}};$$

1) Editio princeps: $fQMN$. P. St.

$$= \frac{G(Qdx - Pdy)}{(dx^2 + dy^2 + dz^2)^{\frac{1}{2}} \sqrt{(1 + P^2 + Q^2)}}.$$

, quem MG cum directione vis F constituit, cosinus est

$$= \frac{PQ + EG}{MG} = \frac{dx + Pdz}{(dx^2 + dy^2 + dz^2)^{\frac{1}{2}} \sqrt{(1 + P^2 + Q^2)}};$$

vis deflectens ex vi F orta est

$$= \frac{F(dx + Pdz)}{(dx^2 + dy^2 + dz^2)^{\frac{1}{2}} \sqrt{(1 + P^2 + Q^2)}}.$$

guli, quem directio vis E cum MG constituit, cosinus est

$$= \frac{-PE}{MG} = \frac{-dy - Qdz}{(dx^2 + dy^2 + dz^2)^{\frac{1}{2}} \sqrt{(1 + P^2 + Q^2)}}.$$

flectens ex vi E orta est

$$= \frac{-E(dy + Qdz)}{(dx^2 + dy^2 + dz^2)^{\frac{1}{2}} \sqrt{(1 + P^2 + Q^2)}}.$$

utem ante vim tangentialem vocaverimus T, vim prementem $= M$ et entem $= N$, ad has vires tres propositas E, F et G reduximus;

$$T = \frac{Edx + Fdy + Gdz}{\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}}$$

$$M = \frac{-EP - FQ + G}{\sqrt{(1 + P^2 + Q^2)}}$$

$$N = \frac{-E(dy + Qdz) + F(dx + Pdz) + G(Qdx - Pdy)}{(dx^2 + dy^2 + dz^2)^{\frac{1}{2}} \sqrt{(1 + P^2 + Q^2)}}.$$

COROLLARIUM 1

Si igitur corpus a tribus potentiis E, F et G sollicitetur, erit ro altitudine debita celeritati in M

$$dv = -Edx - Fdy - Gdz$$

(§ 849), si loco T ponatur vis tangentialis ex resolutione potentia et G orta.

COROLLARIUM 2

858. Si praeterea corpus in medio resistente moveatur atque in M fuerit $= R$, erit [§ 850]

$$dv = -Edx - Fdy - Gdz - R\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}.$$

COROLLARIUM 3

859. Si in aequatione § 851 inventa, in qua effectus vis def est determinatus, loco N substituatur vis deflectens ex resoluti E, F et G orta, prodibit

$$\frac{2vddz(Pdy - Qdx) - 2vddy(dx + Pdz)}{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$
$$= -E(dy + Qdz) + F(dx + Pdz) - G(Pdy - Qdx).$$

COROLLARIUM 4

860. Si ergo ex istis duabus aequationibus conflatur una eli prodibit aequatio, quae cum locali ad superficiem $dz = Pdx + Qd$ determinabit viam a corpore in superficie descriptam.

COROLLARIUM 5

861. Vis autem, qua superficies secundum normalem in eam tam ex vi normali premente M quam ex vi centrifuga orta est

$$= \frac{(G - EP - FQ)(dx^2 + dy^2 + dz^2) + 2v(dPdx + dQdy)}{(dx^2 + dy^2 + dz^2)\sqrt{(1 + P^2 + Q^2)}}$$

(§ 845) substituto loco M valore invento.

COROLLARIUM 6

862. Est vero ex aequatione corollario 3 inventa

$$2v = \frac{(dx^2 + dy^2 + dz^2)(E(dy + Qdz) - F(dx + Pdz) + G(Pdy - Qdx}{-ddz(Pdy - Qdx) + ddy(dx + Pdz)}$$

ibi substituto prodibit tota pressio

$$\frac{(Gdxddy - Fdxddz + Edyddz - Edzddy)\sqrt{(1+P^2+Q^2)}}{ddz(Pdy - Qdx) - ddy(dx + Pdz)}.$$

SCHOLION

nia tres potentiae E, F, G directiones habent invicem normales, a iis aequivalens $= \sqrt{(E^2 + F^2 + G^2)}$. His vero tribus viribus invenimus tres M, N et T, quarum directiones sunt quoque in-ales; quare istis tribus aequivalens vis erit $= \sqrt{(M^2 + N^2 + T^2)}$. si loco M, N et T substituantur valores inventi ex E, F et G, it quoque $\sqrt{(E^2 + F^2 + G^2)}$; id quod calculo instituto re ipsa se ehendetur. Inservit autem hoc instar probationis, utrum calculus uo haec resolutio est absoluta, recte fuerit institutus, an vero vero probatione instituta reperientur se hae formulae recte habere.

PROPOSITIO 96

PROBLEMA

hypothesi gravitatis uniformis et deorsum directae g determinare corpus super quacunque superficie proiectum in vacuo describit.

SOLUTIO

Q (Fig. 92, p. 431) planum horizontale et M punctum tam in ta quam in linea a corpore descripta. Erit ergo MQ verticalis et irectio vis gravitatis g. Positis $AP = x$, $PQ = y$ et $QM = z$ ione superficiei naturam exprimente $dz = Pdx + Qdy$ sit celeritas elementum Mm percurritur, debita altitudini v. Cum igitur oc sit casus praecedentis, fit enim $G = g$, $E = 0$ et $F = 0$, hae duae aequationes

$$dv = -gdz$$

$$- Qdx) - 2vddy(dx + Pdz) + g(Pdy - Qdx)(dx^2 + dy^2 + dz^2) = 0$$

[§ 859]. Sit porro altitudo debita celeritati, quam corpus habitur in planum horizontale APQ perveniret, $= b$; erit

$$v = b - gz.$$

Per alteram vero aequationem est

$$2v = \frac{g(Pdy - Qdx)(dx^2 + dy^2 + dz^2)}{ddy(dx + Pdz) - ddz(Pdy - Qdx)}.$$

Unde erit

$$\frac{dv}{2v} = \frac{dzddz(Pdy - Qdx) - dzddy(dx + Pdz)}{(Pdy - Qdx)(dx^2 + dy^2 + dz^2)}.$$

Quae aequatio ope aequationis $dz = Pdx + Qdy$ transmutatur in

$$\frac{dv}{2v} = \frac{dyddy + dzddz}{dx^2 + dy^2 + dz^2} - \frac{Pddy}{Pdy - Qdx};$$

quae integrata dat

$$lv = l(dx^2 + dy^2 + dz^2) - 2\int \frac{Pddy}{Pdy - Qdx}.$$

In quovis ergo casu speciali investigari debet, an

$$\frac{Pddy}{Pdy - Qdx}$$

integrationem admittat. Quod si contigerit, habebitur v in di primi gradus; atque cum sit $v = b - gz$, orietur aequatio differe gradus curvae descriptae naturam exprimens. Pressio vero in secundum normalem erit

$$= \frac{gdxddy\sqrt{(1 + P^2 + Q^2)}}{ddz(Pdy - Qdx) - ddy(dx + Pdz)},$$

quae sublatis differentialibus secundi gradus [§ 861] abit in hanc

$$\frac{-g}{\sqrt{(1 + P^2 + Q^2)}} - \frac{2(b - gz)(dPdx + dQdy)}{(dx^2 + dy^2 + dz^2)\sqrt{(1 + P^2 + Q^2)}}.$$

Q. E. I.

COROLLARIUM 1

865. Celeritas ergo corporis in hypothesi gravitatis uniformi sum directae in superficie quacunque moti ex sola altitudine cog omnino ut si corpus in eodem plano moveretur.

COROLLARIUM 2

...mpusculum, quo elementum Mm absolvitur, ponatur dt, erit

$$dt = \frac{\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}}{\sqrt{v}}.$$

...m ergo inventam erit

$$\ldots ldt = \int \frac{Pddy}{Pdy - Qdx} \quad \text{atque} \quad \frac{ddt}{dt} = \frac{Pddy}{Pdy - Qdx}.$$

COROLLARIUM 3

...iventis aequationibus reperietur

$$\ldots \frac{(Pdy - Qdx)(dx^2 + dy^2 + dz^2)}{2\,dx(b - gz)(1 + P^2 + Q^2)} + \frac{(dPdx + dQdy)(Pdy - Qdx)}{(1 + P^2 + Q^2)dx}$$

$$\ldots \frac{Q(Pdy - Qdx)(dx^2 + dy^2 + dz^2)}{2\,dx(b - gz)(1 + P^2 + Q^2)} + \frac{(dPdx + dQdy)(dx + Pdz)}{(1 + P^2 + Q^2)dx}.$$

$$\ldots z = \frac{gP(Pdy - Qdx)(dx^2 + dy^2 + dz^2)}{2(b - gz)(1 + P^2 + Q^2)} - \frac{(dPdx + dQdy)(dy + Qdz)}{1 + P^2 + Q^2}.$$

...scriptae radius osculi erit

$$\frac{2(dx^2 + dy^2 + dz^2)(b - gz)\sqrt{(1 + P^2 + Q^2)}}{\ldots^2(Pdy - Qdx)^2(dx^2 + dy^2 + dz^2) + 4(b - gz)^2(dPdx + dQdy)^2)}.$$

SCHOLION

...m formularum usum in casibus particularibus, quibus certa ...s superficierum consideratur, in sequentibus problematis fusius ...bus singularium superficierum exempla adiungemus.

PROPOSITIO 97

PROBLEMA

...ypothesi gravitatis uniformis deorsum tendentis g determinare motum ...rficie cuiuscunque cylindri, cuius axis sit verticalis.

SOLUTIO

... cylindri ponitur verticalis, erunt omnes sectiones horizontales ...es; sit igitur $ABQC$ (Fig. 95, p. 444) basis cylindri, in cuius

superficie movetur corpus. Ponatur $AP = x$, $PQ = y$ sitque z corporis altitudo super puncto Q in superficie cylindri. Natura ergo huius superficiei

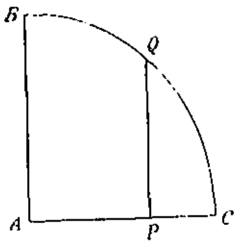


Fig. 95.

cylindricae hac exprimetur aequatione $0 = Pdx +$ seu $Qdy = -Pdx$. Haec autem aequatio orietur ex generali $dz = Pdx + Qdy$, si P et Q fiant quantitates infinite magnae, seu evanescente coefficiente ipsius si quem assumsissemus. Quamobrem in aequationibus ante inventis P et Q quasi quantitates infinite magnae considerari debent, etiamsi sint finitae magnitudinis. Erunt autem P et Q functiones ipsarum x et y tantum neque in iis inerit z. His ergo in calculum deductis habebitur

$$v = b - gz$$

atque

$$2v = \frac{g(Pdy - Qdx)(dx^2 + dy^2 + dz^2)}{Pdzddy - Pdyddz + Qdxddz} = \frac{g(dx^2 + dy^2)(dx^2 + dy^2 + dz^2)}{dydzddy - dy^2ddz - dx^2ddz}$$

propter analogiam $P : Q = dy : -dx$. At posterior aequatio logarithmica

$$lv = l(dx^2 + dy^2 + dz^2) - 2\int \frac{dyddy}{dx^2 + dy^2} = l(dx^2 + dy^2 + dz^2) - l(dx^2 + dy^2)$$

Unde fit

$$\frac{v}{c} = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dx^2 + dy^2} = \frac{b - gz}{c} = 1 + \frac{dz^2}{dx^2 + dy^2}.$$

Hinc oritur

$$(b - c - gz)(dx^2 + dy^2) = cdz^2$$

seu

$$\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \frac{dz\sqrt{c}}{\sqrt{(b - c - gz)}},$$

cuius integralis est

$$\int\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = -\frac{2\sqrt{c(b - c - gz)}}{g}\,{}^{1)},$$

ubi $\int\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ denotat arcum basis BQC motu horizontali percu Si tempusculum, quo elementum Mm absolvitur, ponatur dt, erit

$$\frac{ddt}{dt} = \frac{dyddy}{dx^2 + dy^2} \quad \text{atque} \quad \alpha dt = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}\,{}^{2)}$$

---

1) Editio princeps: $\int\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = -\frac{\sqrt{c(b - c - gz)}}{g}$. Correxit P. St.

2) Ex aequatione $\frac{v}{c} = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dx^2 + dy^2}$ sequitur constantem α esse $= \sqrt{c}$. P. St

$$\alpha t = \int V(dx^2 + dy^2).$$

erunt proportionalia arcubus in basi respondentibus.
autem

$$\int V(dx^2 + dy^2) = -\frac{2V c(b - c - gz)}{g}$$

uem pro curva in superficie cylindrica descripta, si haec super-
m concipiatur explicata; denotabit enim tum $\int V(dx^2 + dy^2)$
xe horizontali et z applicatam verticalem. Proiectionem vero
ae in plano verticali planum horizontale iuxta AC secante
ope aequationis $Pdx + Qdy = 0$ eliminetur y, ut prodeat
x et z, quae erunt coordinatae huius proiectionis. Scilicet ob
it

$$V(dx^2 + dy^2) = \frac{dx}{Q} V(P^2 + Q^2)$$

$$\int \frac{dx V(P^2 + Q^2)}{Q} = -\frac{2V c(b - c - gz)}{g},$$

loco y eius valor in x debet substitui.
ro, quam superficies sustinebit, a sola vi centrifuga orietur
am y in ipsa superficie sitam eritque

$$= \frac{2(b - gz)(dPdx + dQdy)}{(dx^2 + dy^2 + dz^2) V(P^2 + Q^2)},$$

ab axe cylindri recedere conabitur, si haec expressio fuerit
E. I.

COROLLARIUM 1

ergo, quam corpus in superficie cylindri describit, si super-
explicetur, abibit in parabolam, ipsam scilicet proiectoriam,
roiectum in plano verticali describeret.

COROLLARIUM 2

otus corporis super superficie cylindrica compositus conside-
verticali, quod vel sursum vel deorsum progreditur, et ex

orizontali, erit motus horizontalis aequabilis, quia tempora t proportiona unt $\int\sqrt{(dx^2+dy^2)}$, i. e. arcubus horizontali motu percursis. Motus ve erticalis erit vel aequabiliter acceleratus vel retardatus.

COROLLARIUM 3

872. Si ergo motus horizontalis evanescit, corpus recta vel ascenc el descendet, omnino ac si libere ascenderet vel descenderet. Hicque cas rodit, si fuerit $c=0$, quo $\sqrt{(dx^2+dy^2)}$ evanescit.

EXEMPLUM

873. Sit basis cylindri circulus, cuius quadrans sit BQC et radius $AB=$ rit $x^2+y^2=a^2$ et $xdx+ydy=0$. Fiet ergo $P=x$ et $Q=y=\sqrt{(a^2-$ roiectio vero lineae in superficie cylindrica hac descriptae in plano vertic x AC erecto exprimetur aequatione

$$\int\frac{adx}{\sqrt{(a^2-x^2)}}=-\frac{2\sqrt{c(b-c-gz)}}{g}.$$

i ergo fuerit $c=0$, fiet $dx=0$ atque $x=$ constanti; quare hoc casu p ctio erit linea recta. Curva vero, quae est proiectio pro quocunque ips valore, ope rectificationis circuli construetur. Pressio autem, quam sup cies cylindri sustinet, est

$$=\frac{2(b-gz)(dx^2+dy^2)}{(dx^2+dy^2+dz^2)a}=\frac{2c}{a}$$

ropter aequationem

$$\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{dx^2+dy^2}=\frac{b-gz}{c}.$$

uare pressio ubique erit constans et ipsi c proportionalis.

COROLLARIUM 4

874. Propter eandem aequationem erit generaliter pressio, quam cylin uicunque sustinet,

$$\frac{2c(dPdx+dQdy)}{(dx^2+dy^2)\sqrt{(P^2+Q^2)}}=\frac{2Q^2c(dPdx+dQdy)}{dx^2(P^2+Q^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{2Qc(QdP-PdQ)}{dx(P^2+Q^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

SCHOLION

solum autem ope resolutionis motus super superficie cylindrica motus facile potest determinari, sed etiam, si cylindri axis ılis, eadem facilitate motus corporis cognoscetur. Namque si eat motum horizontalem iuxta axem cylindri, corpus perpetuo ıdri sectione permanebit in eaque movebitur tanquam super ı vero accedat motus horizontalis, is perpetuo idem manebit motum perturbabit; atque his motibus coniungendis verus facile cognoscetur.

PROPOSITIO 98

PROBLEMA

orpus moveatur in superficie solidi rotundi, cuius axis est verticalis in vacuo a gravitate uniformi g sollicitatum, determinare motum uiusmodi superficie.

SOLUTIO

solidum rotundum conversione curvae AM circa axem vertiınt omnes eius sectiones horizontales circuli, quorum radii sunt ae AM. Aequatio ergo naturam ei exprimens erit

$$dz = \frac{xdx + ydy}{Z}$$

unctionem quamcunque ipsius z;

$$Zdz = x^2 + y^2 = LM^2.$$

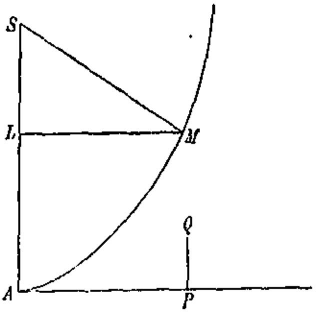


Fig. 96.

aequatio pro curva AM inter $M = \sqrt{2\int Zdz}$, dabitur quoque Z. His praemissis erit itaque

$$P = \frac{x}{Z} \quad \text{et} \quad Q = \frac{y}{Z};$$

qui valores si substituantur, habebuntur duae sequentes aequatione[s] bus tam curva descripta quam motus super ea cognoscetur

$$v = b - gz$$

atque

$$lv = l(dx^2 + dy^2 + dz^2) - 2\int \frac{xddy}{xdy - ydx} = l(dx^2 + dy^2 + dz^2) - 2l(xdy - yd[x])$$

Quare erit

$$v = \frac{c^3(dx^2 + dy^2 + dz^2)}{(xdy - ydx)^2} = b - gz.$$

Ponatur $x^2 + y^2 = u^2$; erit u functio quaedam ipsius z, nempe

$$u^2 = 2\int Zdz,$$

atque superior aequatio abibit in hanc

$$\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \frac{\sqrt{(c^3dz^2 + u^2du^2(b - gz))}}{\sqrt{(u^2(b - gz) - c^3)}}.$$

Proiectio vero in plano horizontali per aequationem inter x et y [h]
si ex aequatione $x^2 + y^2 = 2\int Zdz$ valor ipsius z in x et y sub[...]
huiusque proiectionis arcus est $\int\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$. In plano autem [...]
habebitur proiectio eleminanda y; quo facto prodit aequatio

$$\frac{udx - xdu}{c\sqrt{c(u^2 - x^2)}} = \sqrt{\frac{du^2 + dz^2}{u^2(b - gz) - c^3}},$$

quae aequatio, si per u dividatur, constructionem admittit. Pres[sio],
quam superficies sustinet axem versus, erit

$$= \frac{-gZ}{\sqrt{(x^2 + y^2 + Z^2)}} - \frac{2c^3Z(dx^2 + dy^2) - 2c^3dZ(xdx + ydy)}{Z(xdy - ydx)^2\sqrt{(x^2 + y^2 + Z^2)}}.$$

Q. E. I.

COROLLARIUM 1

877. Si tempusculum, quo elementum Mm absolvitur, ponatur [...]

$$\frac{ddt}{dt} = \frac{xddy}{xdy - ydx},$$

lis ost

$$\alpha dt = xdy - ydx.^{1})$$

tompus orit ut

$$xy - 2\int ydx$$

ydx aream proiectionis in plano horizontali.

COROLLARIUM 2

corpus in proiectione in plano horizontali moveri concipiatur, eius in Q debita altitudini

$$\frac{c^3(dx^2+dy^2)}{(ydx-xdy)^2},$$

in proiectione ipse motus in superficie invenietur.

COROLLARIUM 3

igitur BQC (Fig. 97) proiectio curvae in plano horizontali, in corpus, ita ut motus eius respondeat motui corporis in super- t tempus, quo arcus BQ absolvitur, ut

$$\frac{xy}{2} - \int ydx$$

ut

$$\int ydx - \frac{xy}{2},$$

BAQ ducto radio AQ.

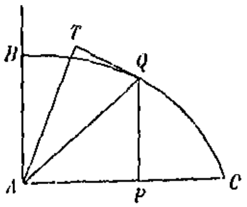


Fig. 97.

COROLLARIUM 4

ae autem BAQ elementum est

$$\frac{ydx - xdy}{2}.$$

atione § 870 $v = \frac{c^3(dx^2+dy^2+dz^2)}{(xdy-ydx)^2}$ sequitur constantem α esse $= c\sqrt{c}$. P. St.

Ducta ergo tangente QT et demisso in eam ex A perpendiculo

$$AT = \frac{ydx - xdy}{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}.$$

Quare altitudo celeritati in Q debita est

$$= \frac{c^3}{AT^2} = \frac{c^3}{p^2}$$

posito $AT = p$.

COROLLARIUM 5

881. Corpus ergo in proiectione motum perinde in ea mov
libere moveretur attractum vi quadam centripeta ad centrum A

COROLLARIUM 6

882. Respondeat punctum B motus in superficie facti in
detur directio prima motus in superficie, dabitur perpendiculum
in B. Sit ergo $AB = f$ et perpendiculum in tangentem $= h$;
celeritati in B debita $= \frac{c^3}{h^2}$.

COROLLARIUM 7

883. Vis ergo centripeta versus A tendens, quae faciet,
proiectione BQC libere moveatur, erit

$$= \frac{2c^3 dp}{p^3 du}$$

posito u pro $\sqrt{(x^2 + y^2)}$. Aequatio vero inter u et z exprimet
vae, cuius conversione genita est superficies proposita, ideoque

COROLLARIUM 8

884. Est porro

$$\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \frac{udu}{\sqrt{(u^2 - p^2)}} \quad \text{et} \quad ydx - xdy = \frac{pudu}{\sqrt{(u^2 - p}}$$

$$p^2 = \frac{c^3u^2(du^2+dz^2)}{c^3dz^2+u^2du^2(b-gz)}.$$

COROLLARIUM 9

885. Huius ergo quantitatis

$$-\frac{c^3dz^2+u^2du^2(b-gz)}{u^2(du^2+dz^2)}$$

rentiale per du divisum dabit vim centripetam in A requisitam, ut corpus proiectione BQC moveatur libere, motu respondente motui corporis in rficie.

COROLLARIUM 10

886. Si $c=0$, fiet quoque $p=0$. Quare hoc casu proiectio in plano izontali erit recta per A transiens, super qua corpus ad A accedens ita ahetur, ut sit vis centripeta

$$\frac{1}{du}d.\frac{-du^2(b-gz)}{du^2+dz^2}.$$

COROLLARIUM 11

887. Si corporis directio prima fuerit horizontalis, tangens in B ad AB t normalis ideoque $h=f$. Hoc vero casu celeritas in superficie aequalis t celeritati in proiectione; quare si fuerit i valor ipsius z, si est $u=f$, t

$$b-gi=\frac{c^3}{f^2}.$$

COROLLARIUM 12

888. Si praeterea vis centripeta in B aequalis fuerit vi centrifugae, rva BQC erit circulus et propterea ipsa quoque curva in superficie

descripta atque motus tam in superficie quam in proiectione a
ubi est $u = f$ et $z = i$, $dz = mdu$; erit ob $p = f$ et $u = f$ et
quo circulus describitur,

$$2c^3 = gmf^3.\text{[1]}$$

COROLLARIUM 13

889. Si ponatur $\pi : 1$ ut peripheria ad diametrum, erit
peripheria $= 2\pi f$, quae divisa per celeritatem $\sqrt{\frac{c^3}{f}}$, i. e. $\sqrt{\frac{gmf}{2}}$
unius periodi in circulo, quod ergo erit

$$= \frac{2\pi\sqrt{2f}}{\sqrt{gm}}.$$

Pendulum ergo integras oscillationes his periodis isochronas
$= \frac{f}{m}$ in eadem gravitatis hypothesi.

COROLLARIUM 14

890. In superficie ergo, quae generatur conversione curvae
p. 447) circa axem verticalem AL, corpus proiectum circul
describere potest eodem tempore, quo pendulum longitudinis
LS integram oscillationem absolvit.

COROLLARIUM 15

891. Si ergo curva AM fuerit parabola, omnes period
horizontales in conoide parabolica aequalibus absolventur tem
penduli iisdem temporibus oscillationes integras peragentis lo
bitur dimidiae parti parametri.

SCHOLION 1

892. Quaecunque assumatur curva AM, si vis centripeta
iectione versus A ex data formula definiatur eaque aequalis po
fugae atque coniungatur cum aequatione $b - gi = \frac{c^3}{f^2}$, prodibit

$$2c^3 = gmf^3;$$

---

1) Vide demonstrationem § 892 datam. P. St.

...nim casu tam proiectio erit circulus quam ipsa curva in superficie ...ota. Quo vero hoc melius appareat, ponatur $dz = q du$ provenietque ... vis centripeta

$$= \frac{2q\,dq(bu^2 - gzu^3 - c^3)}{u^2 du(1+q^2)^2} + \frac{2c^3 q^2 + gqu^3}{u^3(1+q^2)}.$$

...onatur $u = f$, $z = i$ et $bf^3 = gf^2 i + c^3$ atque $q = m$; erit vis centripeta

$$= \frac{2c^3 m^2 + gmf^3}{f^3(1+m^2)};$$

...is posita vi centrifugae $\frac{2c^3}{f^3}$ dat

$$2c^3 = gmf^3.$$

EXEMPLUM

...93. Sit superficies conica circularis seu AM (Fig. 96, p. 447 et Fig. 97, p. 449) ...recta utcunque inclinata ad axem AL; quare erit $z = mu$ et $dz = mdu$. ...go centripeta ad A tendens, quae faciet, ut corpus libere in proiectione ... moveatur, erit

$$= \frac{2c^3 m^2 + gmu^3}{u^3(1+m^2)}.$$

...ergo vis erit composita ex vi constante et vi reciproce cubis distan... a *centro A* proportionali. Si $c = 0$, tum proiectio erit linea recta ... transiens atque vis centripeta erit $= \frac{gm}{1+m^2}$ sive constans. Corpus ...motu aequabiliter accelerato ad A accedet; motus vero in superficie ... congruet cum descensu vel ascensu super recta inclinata eritque ... aequabiliter acceleratus. Sin autem proiectio fuerit curvilinea et tan...n B normalis ad AB, erit $i = mf$ atque

$$b - gmf = \frac{c^3}{f^2}$$

... $AB = f$. Erit ergo hoc casu

$$b = \frac{c^3 + gmf^3}{f^2},$$

...si corpus in circulo horizontali revolvitur, erit insuper

$$2c^3 = gmf^3.$$

uo ergo hoc accidat, debet esse celeritas corporis debita altitudini

$$\frac{c^3}{f^2} = \frac{gmf}{2}.$$

tque periodi in hoc circulo iisdem absolventur temporibus, quibus pend ongitudinis $\frac{f}{m}$ integrae oscillationes. At si non fuerit $2c^3 = gmf^3$, ver amen

$$b = \frac{c^3 + gmf^3}{f^3},$$

urva BQC habebit quidem in B tangentem ad AB normalem, sed proiec aec non erit circulus. At si $2c^3$ proxime aequale fuerit ipsi gmf^3, cu uoque a circulo non multum discrepabit; habebit autem absides varias, uibus tangens ad radium est perpendicularis. Harum absidum vero posi er propositionem 91 libri praecedentis determinatur. Quoniam enim entripeta est

$$\frac{2c^6m^2 + gmu^3}{u^3(1 + m^2)},$$

haec comparetur cum illa vi centripeta $\frac{P}{y^3}$, ob $y = u$ erit

$$P = \frac{2c^3m^2 + gmu^3}{1 + m^2} \quad \text{atque} \quad \frac{dP}{P} = \frac{3gmu^2du}{2c^3m^2 + gmu^3} \quad \text{atque} \quad \frac{Pdy}{ydP} = \frac{2mc^3 + gu^3}{3gu^3};$$

leoque posito $u = f$ distabit quoque linea absidum a praecedente abs ngulo

$$180\sqrt{\frac{2mc^3 + gf^3}{3gf^3}} \text{ grad.}$$

uoniam autem proxime est $2c^3 = gmf^3$, erit angulus inter duas absi nterceptus $= 180\sqrt{\frac{m^2+1}{3}}$ graduum. Cum ergo $\frac{m^2+1}{3}$ semper sit ma uam $\frac{1}{3}$, erit angulus inter duas absides interceptus maior quam $103^0 55'$.

SCHOLION 2

894. Exemplum superficiei sphaericae hic non adiungo, sed motus su determinationi sequentem propositionem destino, quia haec materia pa ulari pertractatione est digna. Si enim pendulum non secundum plan erticale impellitur, tum corpus in superficie sphaerae movebitur et vel ulos describet vel alias curvas non parum elegantes, quemadmodum cui

[illegible] instrumenti innotescet. Casus quidem, quo pendulum circulos [illegible] Bernoulli in Act. Lips. A. 1715 iam est expositus sub [illegible] turbinatorio[1]). At si curva non fuerit circulus, nemo, quantum [illegible] penduli motum vel consideravit vel determinavit.[2])

DEFINITIO 6

[illegible] *Motus turbinatorius vocatur penduli non in plano verticali impulsi motus.* [illegible] pendulum non in eodem plano verticali movetur, sed curvam [illegible] in superficie sphaerica, cuius radius est ipsa penduli [illegible]

PROPOSITIO 99

PROBLEMA

[illegible] *Penduli ad motum turbinatorium incitati determinare motum et lineam [illegible] describit.*

SOLUTIO

[illegible] motum pendulo est alligatum, in superficie sphaerica move- [illegible] Sit haec longitudo seu radius [illegible] est longitudo penduli.

[illegible]

$$z = a - \sqrt{(a^2 - u^2)}$$

[illegible] AM (Fig. 96, p. 447 et Fig. 97, p. 449). Erit ergo

$$y = \frac{u}{\sqrt{(a^2 - u^2)}} \quad \text{et} \quad dy = \frac{a^2 du}{(a^2 - u^2)^{\frac{3}{2}}}$$

[illegible]

$$\frac{2ydy}{u^2du} = \frac{2a^2}{u(a^2 - u^2)^2}.$$

1) [illegible], *De centro turbinationis inventa nova*, Acta erud. 1715, p. 242; *Opera* [illegible] 1742, p. 187; vide etiam Chr. Huygens, *Horologium oscil-* [illegible] Vol. I, Lugduni Batavorum 1724, p. 185. P. St. [illegible] problema considerasse nec non solutionis compotem fuisse verisimile [illegible] *mathematica*, Londini 1687, Lib. I sect. X prop. LV [illegible]

uo ergo hoc accidat, debet esse celeritas corporis debita altitudini

$$\frac{c^3}{f^2} = \frac{gmf}{2}.$$

tque periodi in hoc circulo iisdem absolventur temporibus, quibus pend
ongitudinis $\frac{f}{m}$ integrae oscillationes. At si non fuerit $2c^3 = gmf^3$, ver
umen

$$b = \frac{c^3 + gmf^3}{f^2},$$

urva BQC habebit quidem in B tangentem ad AB normalem, sed proiec
aec non erit circulus. At si $2c^3$ proxime aequale fuerit ipsi gmf^3, cu
uoque a circulo non multum discrepabit; habebit autem absides varias,
uibus tangens ad radium est perpendicularis. Harum absidum vero posi
er propositionem 91 libri praecedentis determinatur. Quoniam enim
entripeta est

$$\frac{2c^3m^3 + gmu^3}{u^6(1+m^2)},$$

haec comparetur cum illa vi centripeta $\frac{P}{y^6}$, ob $y = u$ erit

$$P = \frac{2c^3m^2 + gmu^3}{1+m^2} \quad \text{atque} \quad \frac{dP}{P} = \frac{3gmu^2du}{2c^3m^2 + gmu^3} \quad \text{atque} \quad \frac{Pdy}{ydP} = \frac{2mc^3 + gu^3}{3gu^3};$$

deoque posito $u = f$ distabit quoque linea absidum a praecedente absi
ngulo

$$180\sqrt{\frac{2mc^3 + gf^3}{3gf^3}} \text{ grad.}$$

uoniam autem proxime est $2c^3 = gmf^3$, erit angulus inter duas absi
nterceptus $= 180\sqrt{\frac{m^2+1}{3}}$ graduum. Cum ergo $\frac{m^2+1}{3}$ semper sit mai
uam $\frac{1}{3}$, erit angulus inter duas absides interceptus maior quam $103^\circ 55'$.

SCHOLION 2

894. Exemplum superficiei sphaericae hic non adiungo, sed motus su
determinationi sequentem propositionem destino, quia haec materia par
ulari pertractatione est digna. Si enim pendulum non secundum plan
erticale impellitur, tum corpus in superficie sphaerae movebitur et vel c
ulos describet vel alias curvas non parum elegantes, quemadmodum cui

...mentum instituenti innotescet. Casus quidem, quo pendulum circulos ...t., a Cel. IOH. BERNOULLIO in Act. Lips. A. 1715 iam est expositus sub ...*motus turbinatorii*.[1]) At si curva non fuerit circulus, nemo, quantum ...unc penduli motum vel consideravit vel determinavit.[2])

DEFINITIO 6

...5. *Motus turbinatorius vocatur penduli non in plano verticali impulsi motus.* ...go casu pendulum non in eodem plano verticali movetur, sed curvam ...m describet in superficie sphaerica, cuius radius est ipsa penduli ...lo, sitam.

PROPOSITIO 99

PROBLEMA

...6. *Penduli ad motum turbinatorium incitati determinare motum et lineam ... quam in superficie sphaerica describit.*

SOLUTIO

...ia corpus motum pendulo est alligatum, in superficie sphaerica move... cuius radius est longitudo penduli. Sit haec longitudo seu radius ...) $= a$; erit

$$z = a - \sqrt{(a^2 - u^2)}$$

...ra circuli AM (Fig. 96, p. 447 et Fig. 97, p. 449). Erit ergo

$$q = \frac{u}{\sqrt{(a^2 - u^2)}} \quad \text{et} \quad dq = \frac{a^2 du}{(a^2 - u^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{2q\,dq}{u^2 du} = \frac{2a^2}{u(a^2 - u^2)^2}.$$

...) IOH. BERNOULLI, *De centro turbinationis inventa nova*, Acta erud. 1715, p. 242; *Opera* ...m. 2, Lausannae et Genevae 1742, p. 187; vide etiam CHR. HUYGENS, *Horologium oscil-*... Paris 1673, Pars V; *Opera varia*, Vol. I, Lugduni Batavorum 1724, p. 185. P. St.

...). NEUTONUM hoc problema considerasse nec non solutionis compotem fuisse verisimile ... *Philosophiae naturalis principia mathematica*, Londini 1687, Lib. I sect. X prop. LV ... P. St.

Ex his invenitur vis centripeta ad A tendens, quae facit, ut [illegible] iectione BQC libere moveatur.

$$\frac{2ba - 2qaa + 3q\sqrt{(a^2 - u^2)} \ldots}{a}$$

Atque pro curva BQC haec habebitur aequatio

$$p^2 = \frac{a^2c^2}{c^2 + (b - qa)(a^2 - u^2) + q(a^2 - u^2)^{\frac{3}{2}}}$$

quae ad proiectionem BQC construendam sufficit. [illegible] dicularis ad radium AB, id quod semper accidit contingere [illegible] iectio sit linea recta, quia vis centripeta decrescit decrescente [illegible] $AB = f$; erit

$$c = a \ldots \sqrt{(a^2 - f^2)}$$

atque

$$b = qa + q\sqrt{(a^2 - f^2)} = \frac{c^2}{f^2};$$

Si praeterea fuerit

$$2c^2 = \frac{qf^4}{\sqrt{(a^2 - f^2)}},$$

corpus in circulo revolvetur, cuius radius est f, celeritate debita

$$\frac{c^2}{f^2} = \frac{qf^2}{2\sqrt{(a^2 - f^2)}}.$$

Penduli vero integras oscillationes iisdem temporibus absolv[illegible] est $= \sqrt{(a^2 - f^2)}$. Sin autem non fuerit $2c^2 = \frac{qf^4}{\sqrt{(a^2 - f^2)}}$, diffe[illegible] valde exigua, curva BQC a circulo non multum discrepabit [illegible] quo positiones absidum inveniantur, erit iuxta propositionem [illegible] cedentis

$$y = u \text{ et } P = \frac{c^4}{u^2}(2b - 2qa + 3q\sqrt{(a^2 - u^2)} \ldots$$

Hinc est

$$\frac{dP}{P} = \frac{4du}{u} - \frac{3qudu}{(2b - 2qa)\sqrt{(a^2 - u^2)} + 3q(a^2 - u^2)}$$

atque

$$\frac{ydP}{Pdy} = 4 - \frac{3qu^2}{(2b - 2qa)\sqrt{(a^2 - u^2)} + 3q(a^2 - u^2)}.$$

ı foro est circulus, ponatur $u = f$ atque

$$2b - 2ga = \frac{gf^3}{\sqrt{(a^2 - f^2)}} - 2g\sqrt{(a^2 - f^2)} = \frac{3gf^2 - 2ga^2}{\sqrt{(a^2 - f^2)}},$$

prodibit

$$\frac{ydP}{Pdy} = 4 - \frac{3f^2}{a^2}.$$

tur intervallum inter duas absides esse angulum

$$\frac{180a}{\sqrt{(4a^2 - 3f^2)}} \text{ grad.}$$

cet angulo locus, in quo pendulum ab axe maxime distat, dissitus in quo pendulum axi est proximum. Q. E. I.

COROLLARIUM 1

Quo igitur pendulum $AB = a$ (Fig. 98) motu turbinatorio circulum scribat, oportet, ut eius celeritas debita sit altitudini $\frac{g \cdot BO^2}{2 \cdot AO}$.

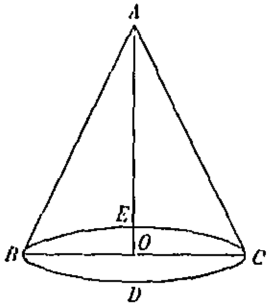


Fig. 98.

COROLLARIUM 2

ongitudo vero penduli, quod oscillationes minimas integras eodem solvit, quo periodus in circulo $BDCE$ conficitur, est $= AO$.

COROLLARIUM 3

'empora ergo, quibus diversi circuli motu turbinatorio a pendulo runtur, sunt in subduplicata ratione altitudinum AO.

COROLLARIUM 4

900. Quo igitur pendulum longitudinis a circulum horizontalem maxin onficiat, cuius radius est a, celeritas infinite magna requiritur atque quac eriodus tempore infinito parvo absolvitur.

COROLLARIUM 5

901. Si radius circuli BO fuerit valde parvus respectu penduli AB ngruent periodi motus turbinatorii cum oscillationibus integris eius nduli.

COROLLARIUM 6

902. Si curva descripta non fuerit circulus, sed figura proxima at O valde parvum, erit angulus inter duas absides 90^0 seu rectus.

COROLLARIUM 7

903. Hoc vero casu curva a corpore descripta erit ellipsis cont bens in A. Quod ex vi centripeta colligitur, quae tum ipsis distantiis oportionalis.

COROLLARIUM 8

904. Quo maior autem est radius BO, eo maior quoque erit ang ter duas absides interceptus. Atque si fiat $BO = BA$, erit hic angulus 1

COROLLARIUM 9

905. Si angulus BAO fuerit 30 graduum, erit $BO = \frac{1}{2} BA$ $= \frac{1}{2} a$. Angulus ergo inter duas absides interceptus erit $\frac{360}{\sqrt{13}}$ graduum $^0 50'$. Proiectionis ergo in plano horizontali haec erit figura $abcdefghik$ ig. 99, p. 459) in qua absides summae sunt in a, c, e, g, i et imac d, f, h, k.

COROLLARIUM 10

906. In hac igitur figura linea absidum movetur in consequentia; sing im periodis circiter 39^0 progredietur in consequentia.

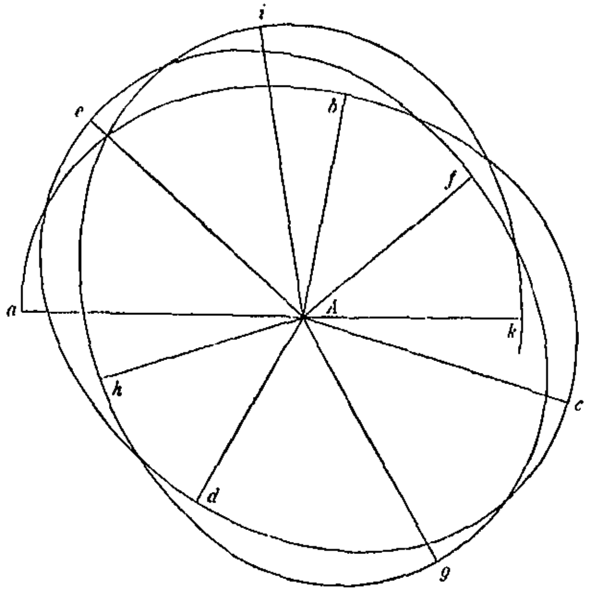


Fig. 99.

COROLLARIUM 11

7. Sin autem ille angulus BAO minor fuerit quam 30 graduum, tum etiam erit absidum progressio. Quae quo pro quovis angulo BAO cognoscatur, fractionem

$$\frac{a}{\sqrt{(4a^2-3f^2)}}$$

m resolvo, quae erit sequens

$$\frac{1}{2}+\frac{3f^2}{16a^2}+\frac{27f^4}{256a^4}+\text{etc.}$$

rgo periodo linea absidum promovetur angulo $\frac{135f^2}{a^2}$ graduum quam , si f valde est parvum.

COROLLARIUM 12

3. Ex his apparet promotionem lineae absidum in singulis periodis esse in duplicata ratione sinus anguli BAO.

INDEX NOMINUM

QUAE TOMIS I ET II CONTINENTUR